Script generated by TTT

Title: Meixner: test2 (28.11.2012)

Date: Wed Nov 28 17:46:06 CET 2012

Duration: 85:16 min

Pages: 34

WS 2012/13

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2012WS/ds/uebung/

28. November 2012

ZÜ VII

Übersicht:

1. Übungsbetrieb: Mittelklausur am 15. Dezember
   Termin, Ort, Anmeldung, Ablauf, Code
2. Zusatzaufgabe: Repetitorium
3. Thema: Polynome und rationale Funktionen:
4. Vorbereitung: auf TA Blatt 7:
   Euklidischer Algorithmus (VA1)
   Polynomdivision (VA2)
   Partialbruchzerlegung (VA3)

1. Übungsbetrieb: Mittelklausur am 15. Dezember

1.1 Termin und Ort

Zeit: Samstag, 15. Dezember, 9 – 11.30 Uhr

Ort: Hörsäle MW 0001, MW 2001, MW 1801
MI HS1, Interim HS1

Bitte mindestens 15 Minuten vor Beginn im Hörsaal erscheinen!

Platzverteilung:
Die Zuordnung der Teilnehmer auf die Hörsäle erfolgt nach Abschnitten des Alphabets siehe Übungswebseite ab 13. Dezember.

Die Verteilung auf Sitzplätze ist den Listen zu entnehmen, die an den Hörsaaleingängen aushängen werden.

1.2 Anmeldung

Eine Anmeldung für die Midterm
erfolgt über TUMonline oder in Sonderfällen persönlich am Infopoint.

Diejenigen Teilnehmer,
die sich nicht über TUMonline angemeldet hatten,
besorgen ihre Anmeldung bitte nachträglich
spätestens bis zum 18.12.2012
persönlich im Infopoint.

Grundsätzlich bei Nichtanmeldung:
Bitte im Hörsaal bei der Aufsicht melden!

Achtung:

Bei Nichtanmeldung kann nicht garantiert werden, dass Sitzplatz und Klausurunterlagen zur Verfügung stehen!

Alle Teilnehmer der Klausuren müssen sich bei der Ausweiskontrolle im Hörsaal ausweisen können!!

1.3 Ablauf

Es nicht erlaubt, Unterlagen zu benutzen,
außer
einem persönlich handbeschriebenen DIN A4 Blatt (beidseitig).

Fragen während der Klausur sind erlaubt,
aber
Antworten werden, falls notwendig,
nur als Hörsaalansage gegeben.

1.4 Code

Auf dem Deckblatt der Klausurangabe finden Sie 8 Kästchen in die Sie einen Code mit 8 Ziffern schreiben können.

Mit diesem Code können Ihre Ergebnisse schnell und Datenschutzrechtlich sicher veröffentlicht werden.

Bitte notieren Sie Ihren Code als Gedächtnisstütze!!!

2. Zusatzaufgabe 3 Repetitorium

ZA 3 wird nicht zur Korrektur abgegeben.

ZA 3 trainiert in kleinen Schritten den Beweis von Prädikatenlogischen Aussagen, hier anhand einer einfachen, endlichen Relation.

3. Thema: Polynome und rationale Funktionen

3.1 Polynomiale Ausdrücke

Addition, Subtraktion, Multiplikation, Unbestimmte $x, \ldots$.

3. Thema: Polynome und rationale Funktionen

3.1 Polynomiale Ausdrücke

Addition, Subtraktion, Multiplikation, Unbestimmte $x, \ldots$.

3.2 Rationale Ausdrücke

Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Unbestimmte $x, \ldots$.

3.3 Rationale Funktionen

Ganze rationale Funktionen (Polynomfunktionen)

Gebrochene rationale Funktionen

Definitionsbereiche mit „endlich vielen Ausnahmen".

4. Vorbereitung auf TA Blatt 7

4.1 VA 1, Euklidischer Algorithmus

In gewissen kommutativen Ringen $R = (S, +, \cdot, 0, 1)$ stellt sich der

erweiterte Euklidische Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers $\mathrm{ggT}(a, b)$ zweier Elemente $a \in S$ und $b \in S$

dar als eine iterierte Transformation (Matrixmultiplikation) Q_i angewandt auf Δ_{i-1} wie folgt mit $r_0 = a$ und $r_1 = b$.

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{pmatrix} = Q_i \Delta_{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{i-1} \\ r_i \end{pmatrix},$$

für alle $i := 1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}$.

4. Vorbereitung auf TA Blatt 7

4.1 VA 1, Euklidischer Algorithmus

In gewissen kommutativen Ringen $R = (S, +, \cdot, 0, 1)$ stellt sich der

erweiterte Euklidische Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers $\mathrm{ggT}(a, b)$ zweier Elemente $a \in S$ und $b \in S$

dar als eine iterierte Transformation (Matrixmultiplikation) Q_i angewandt auf Δ_{i-1} wie folgt mit $r_0 = a$ und $r_1 = b$.

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{pmatrix} = Q_i \Delta_{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{i-1} \\ r_i \end{pmatrix},$$

für alle $i := 1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}$.

Dabei werden die Quotienten q_i so gewählt (geschätzt), dass die Δ_i mit wachsendem i in einem gewissen Sinn stets echt kleiner werden.

Eine Berechnung wird beendet, wenn die Folge der Δ_i maximale Länge besitzt, d. h. wenn kein Quotient existiert, der die Bildung eines noch kleineren Restes erlaubt.

Zur Bemessung der Größe von Elementen eines Ringes dient beispielweise im Ring der ganzen Zahlen $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ die Betragsfunktion. In Polynomringen wird der Grad eines Polynoms verwendet.

Die Berechnung setzt voraus,
dass der Faktor q_i gefunden werden kann!

Dies setzt z.B. voraus, dass r_{i-1} in gewissem Sinne „größer“ ist als r_i.

Falls umgekehrt r_i in gewissem Sinne „größer“ ist als r_{i-1}, dann fügt man eine Vertauschung ein in Gestalt einer Vertauschungsmatrix.
Wir haben dann

$$\begin{pmatrix} r_{i-1} \\ r_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{i-1} \\ r_i \end{pmatrix} .$$

Dies ist ein Schritt einer „Division“.

Wir betrachten im Folgenden den Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ der ganzen Zahlen.

1. Zeigen Sie für alle entsprechenden i

$$\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(r_i, r_{i+1}) .$$

Beweis:

Gemeinsame Teiler zweier Ringelemente r_{i-1}, r_i übertragen sich auf deren Linearkombination $sr_{i-1} + tr_i$ wie folgt:

Falls x Teiler von r_{i-1} und von r_i, i.Z. $x|r_{i-1} \wedge x|r_i$, dann gilt für gewisse Faktoren $h, k \in R$

$$sr_{i-1} + tr_i = sxh + txk = (sh + tk)x ,$$

mithin $\quad x|(sr_{i-1} + tr_i)$.

Die Matrixmultiplikation liefert eine Linearkombination wie folgt.

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_i \\ r_{i-1} - q_i r_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{i-1} \\ r_i \end{pmatrix} .$$

Da die Matrix $Q_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix}$ invertierbar ist mit

$$Q_i^{-1} = \begin{pmatrix} q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

haben die Komponentenpaare der Δ_i für alle i die gleichen Teiler.
w.z.b.w.

Berechnung:

Wir rechnen im Ring der ganzen Zahlen.

Im Euklidischen Algorithmus für den Ring ganzer Zahlen zur Berechnung des $\mathrm{ggT}(a,b)$ werden die Quotienten q_i durch ganzzahlige Division bestimmt.

$$q_i = r_{i-1} \operatorname{div} r_i\,.$$

Abweichend davon könnte man aber auch grob schätzen.

Für die Linearkombination $r_{i+1} = r_{i-1} - q_i r_i$ folgt dann

$$r_{i+1} = r_{i-1} \bmod r_i\,.$$

Die Berechnung wird beendet, wenn $r_{n+1} = 0$ eintritt für irgendein $n \in \mathbb{N}$.

Berechnung (Fortsetzung):

$$\begin{aligned}
r_0 &= 10800\,,\\
r_1 &= 122\,,\\
r_2 &= 10800 \bmod 122 = 64\,,\\
r_3 &= 122 \bmod 64 = 58\,,\\
r_4 &= 64 \bmod 58 = 6\,,\\
r_5 &= 58 \bmod 6 = 4\,,\\
r_6 &= 6 \bmod 4 = 2\,,\\
r_7 &= 4 \bmod 2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Ergebnis: $\mathrm{ggT}(10800, 122) = r_6 = 2.$

Ein äußerst wichtiger nächster Schritt besteht darin, den größten gemeinsamen Teiler r_6 von a und b als Linearkombination von $a = r_0$ und $b = r_1$ zu bestimmen.

Dies geschieht mit dem *erweiterten Euklidischen Algorithmus* wie folgt.

Der erweiterte Euklidische Algorithmus lässt sich als Matrixmultiplikation wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} r_n \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = Q_n \cdot Q_{n-1} \cdot \ldots \cdot Q_2 \cdot Q_1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\begin{aligned}
P_0 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\\
P_k &:= \prod_{i=1}^{k} Q_i, \qquad k = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

(wir definieren hier $\prod_{i=1}^{j} Q_i = Q_j \cdot \prod_{i=1}^{j-1} Q_i$)

erhält man r_n, r_{n+1} als Linearkombination von a, b wie folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{pmatrix} r_n \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = P_n \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen P_k enthalten die Koeffizienten der jeweiligen Linearkombinationen. Man berechnet diese Koeffizienten gleichzeitig mit den r_k durch sukzessive Berechnung von

$$P_k = Q_k \cdot P_{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{k-1} & n_{k-1} \\ m_k & n_k \end{pmatrix} .$$

Es gelten die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} q_k &= r_{k-1} \operatorname{div} r_k \,, \\ r_{k+1} &= r_{k-1} \bmod r_k \,, \\ m_{k+1} &= m_{k-1} - q_k \cdot m_k \,, \\ n_{k+1} &= n_{k-1} - q_k \cdot n_k \,, \\ r_k &= m_k \cdot a + n_k \cdot b \,. \end{aligned}$$

Wir führen die Auswertung der Formeln von Hand aus mit Buchführung in einer Tabelle.

k	r_{k-1}	r_k	q_k	m_{k-1}	m_k	n_{k-1}	n_k
$k=1$	10800	122	88	1	0	0	1
$k=2$	122	64	1		1		-88
$k=3$	64	58	1		-1		89
$k=4$	58	6	9		2		-177
$k=5$	6	4	1		-19		1682
$k=6$	4	2	2		21		-1859
$k=7$	2	0			-61		5400

Ergebnis:

$$m_6 \cdot a + n_6 \cdot b = 21 \cdot 10800 + (-1859) \cdot 122 = 2 \,.$$

Wir führen die Auswertung der Formeln von Hand aus mit Buchführung in einer Tabelle.

k	r_{k-1}	r_k	q_k	m_{k-1}	m_k	n_{k-1}	n_k
$k=1$	10800	122	88	1	0	0	1
$k=2$	122	64	1		1		-88
$k=3$	64	58	1		-1		89
$k=4$	58	6	9		2		-177
$k=5$	6	4	1		-19		1682
$k=6$	4	2	2		21		-1859
$k=7$	2	0			-61		5400

Ergebnis:

$$m_6 \cdot a + n_6 \cdot b = 21 \cdot 10800 + (-1859) \cdot 122 = 2 \,.$$

4.2 VA 2, Polynomdivision

Mit $R = \mathbb{Z}_3[x]$ bezeichnen wir den Ring aller Polynome über einer Variablen x mit Koeffizienten aus dem Körper $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$ der ganzen Zahlen modulo 3.
Seien $a(x), b(x) \in R$ gegeben durch

$$\begin{aligned} a(x) &= x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 1 \,, \\ b(x) &= x^3 + x^2 + 1 \,. \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie Polynome $r_2(x), r_3(x), q_1(x), q_2(x) \in R$ mit $\mathrm{grad}(r_3(x)) < \mathrm{grad}(r_2(x)) < \mathrm{grad}(b(x))$, so dass die folgenden Gleichungen gelten.

$$\begin{aligned} r_2(x) &= a(x) - q_1(x) \cdot b(x) \,, \\ r_3(x) &= b(x) - q_2(x) \cdot r_2(x) \,. \end{aligned}$$

4.2 VA 2, Polynomdivision

Mit $R = \mathbb{Z}_3[x]$ bezeichnen wir den Ring aller Polynome über einer Variablen x mit Koeffizienten aus dem Körper $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$ der ganzen Zahlen modulo 3.
Seien $a(x), b(x) \in R$ gegeben durch

$$\begin{aligned} a(x) &= x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 1\,, \\ b(x) &= x^3 + x^2 + 1\,. \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie Polynome $r_2(x), r_3(x), q_1(x), q_2(x) \in R$ mit $\mathrm{grad}(r_3(x)) < \mathrm{grad}(r_2(x)) < \mathrm{grad}(b(x))$, so dass die folgenden Gleichungen gelten.

$$\begin{aligned} r_2(x) &= a(x) - q_1(x) \cdot b(x)\,, \\ r_3(x) &= b(x) - q_2(x) \cdot r_2(x)\,. \end{aligned}$$

Lösung:

$q_1(x)$ erhält man durch Division von $a(x)$ durch $b(x)$ mit Rest $r_2(x)$.
Ausführung der Division:

$$\begin{array}{rll} \overbrace{x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 1}^{a(x)} & (\mathrm{div}) \; \overbrace{x^3+x^2+1}^{b(x)} = & x^3 \\ -\;(x^6 + x^5 + x^3) & & \\ \hline -x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 1 & & -x^2 \\ -\;(-x^5 - x^4 - x^2) & & \\ \hline x^3 + 2x^2 + 1 & & +1 \\ \cline{3-3} -\;(x^3 + x^2 + 1) & q_1(x) = & x^3+2x^2+1 \\ \hline x^2 = & r_2(x) & \end{array}$$

Entsprechend erhält man $q_2(x)$
durch Division von $b(x)$ durch $r_2(x)$ mit Rest $r_3(x)$.

$$\begin{aligned} a(x) &= x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 1\,, \\ b(x) &= x^3 + x^2 + 1\,, \\ q_1(x) &= x^3 + 2x^2 + 1\,, \\ r_2(x) &= x^2\,, \\ q_2(x) &= x + 1\,, \\ r_3(x) &= 1\,. \end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie ein Polynom $t(x) \in R$ möglichst hohen Grades, das ein gemeinsamer Teiler von $a(x)$ und $b(x)$ ist.

Lösung:

Gesucht ist also der größte gemeinsame Teiler von $a(x)$ und $b(x)$.

Das gesuchte Polynom ist $t(x) = r_3(x) = 1$.

Begründung:
$b(x)$ ist nicht durch $r_2(x)$ ohne Rest teilbar.
Aber $r_2(x)$ ist ohne Rest durch $r_3(x) = 1$ teilbar.

4.3 VA 3, Partialbruchzerlegung

Bestimmen Sie Polynome $a(x),\ b(x) \in \mathbb{Q}[x]$, so dass gilt

$$\frac{x^2+x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{a(x)}{x^2+1} + \frac{b(x)}{x^2+2}\,.$$

Lösung:

Bringt man die Brüche der rechten Gleichungsseite auf einen gemeinsamen Nenner, so erhält man durch Vergleich der Zähler die Gleichung

$$a(x)(x^2+2) + b(x)(x^2+1) = x^2 + x\,.$$

Zur Lösung der Gleichung wählen wir den Ansatz

$$a(x) = a_1x + a_0 \quad \text{und} \quad b(x) = b_1x + b_0$$

und erhalten

$$\begin{aligned} &a(x)(x^2+2) + b(x)(x^2+1) \\ &\quad = \; a_1x^3 + a_0x^2 + 2a_1x + 2a_0 + b_1x^3 + b_0x^2 + b_1x + b_0 \\ &\quad = \; (a_1+b_1)x^3 + (a_0+b_0)x^2 + (2a_1+b_1)x + (2a_0+b_0)\,. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich gewinnt man

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= 0\,, \\ a_0 + b_0 &= 1\,, \\ 2a_1 + b_1 &= 1\,, \\ 2a_0 + b_0 &= 0\,. \end{aligned}$$

Die Lösung ist

$$a_1 = 1,\ a_0 = -1,\ b_1 = -1,\ b_0 = 2\,.$$