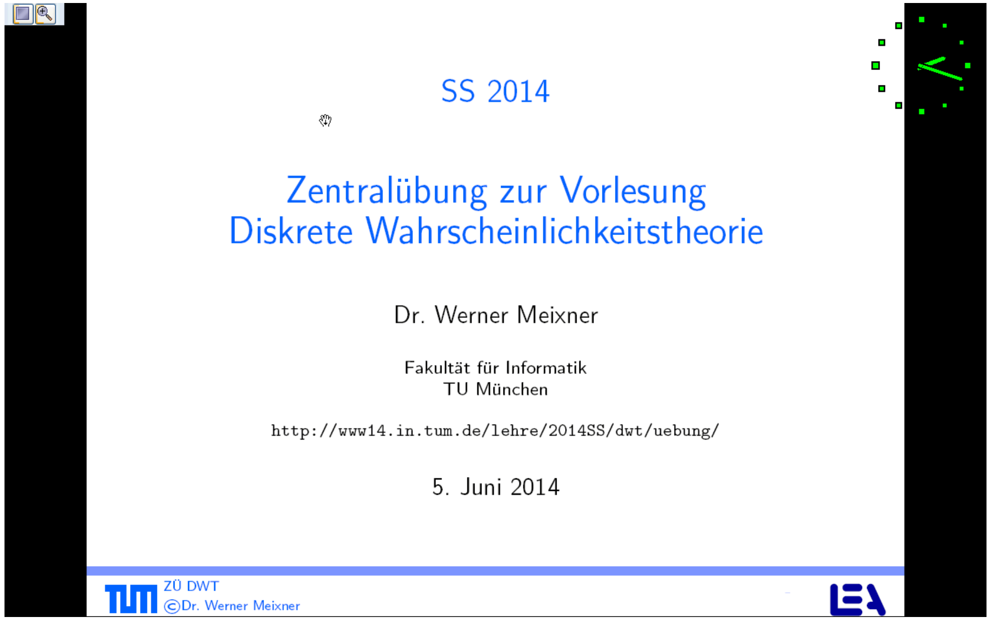
Script generated by TTT

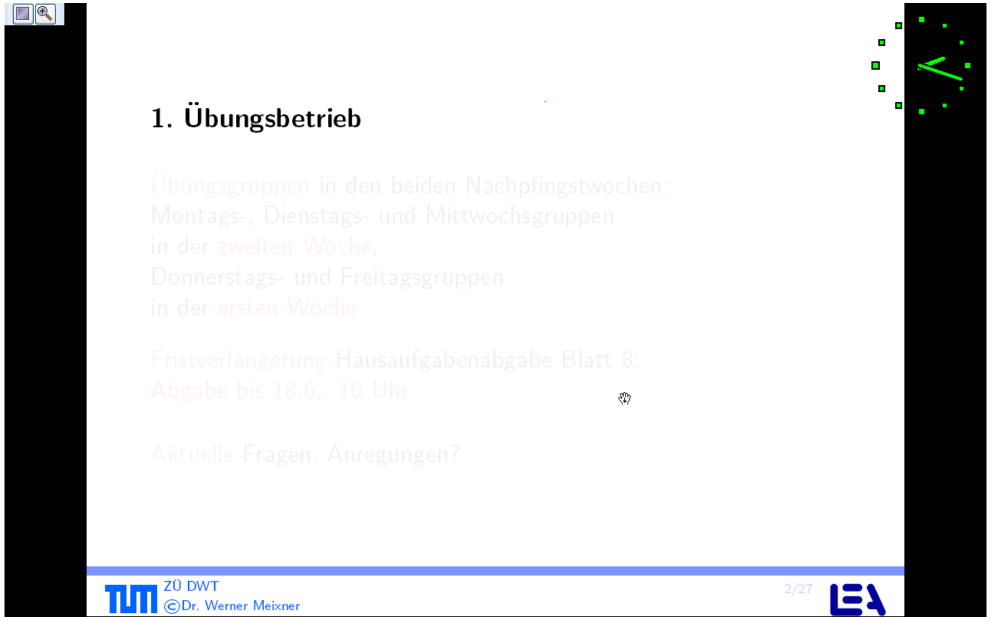
Title: Meixner: Zue_DWT (05.06.2014)

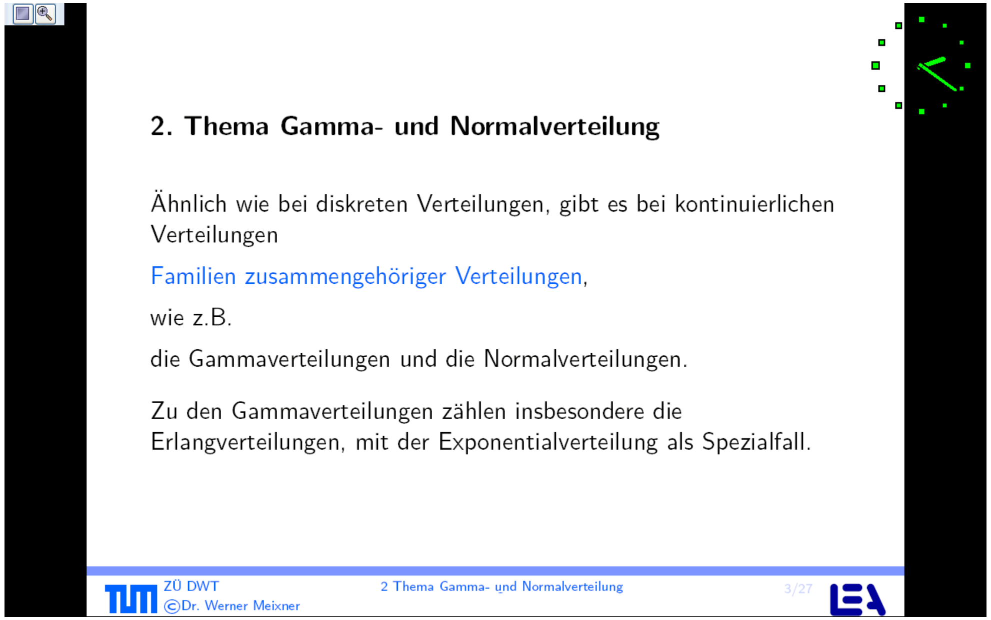
Date: Thu Jun 05 14:18:41 CEST 2014

Duration: 62:19 min

Pages: 33







2.1 Gammaverteilung

Definition

Eine kontinuierliche Zufallsvariable X ist Gammaverteilt von der Ordnung r mit Parameter λ mit reellen Werten $r > 0$ und $\lambda > 0$, i.Z. $X \sim \mathrm{Gamma}(r, \lambda)$, falls für die Dichte f_X von X gilt

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,\infty)}(x)\,,$$

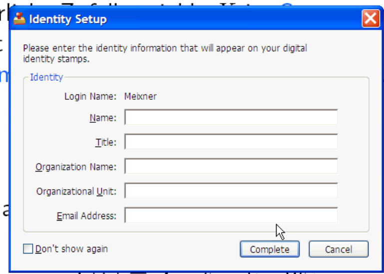
mit der Gammafunktion

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty t^{r-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t\,.$$

2.1 Gammaverteilung

Definition

Eine kontinuierl teilt von der
Ordnung r mit 0 und $\lambda > 0$,
i.Z. $X \sim$ Gamm X gilt



mit der Gamma

$$\int_0$$

Erinnerung

$\Gamma(r+1) = r \cdot \Gamma(r)$,
$\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$ und
$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Eigenschaften

1. $\mathbb{E}[X] = \frac{r}{\lambda}$,
2. $\mathrm{Var}[X] = \frac{r}{\lambda^2}$,
3. Faltungseigenschaft:

$X \sim \mathrm{Gamma}(r, \lambda)$, $Y \sim \mathrm{Gamma}(s, \lambda)$ und X, Y unabhängig
$\Longrightarrow X + Y \sim \mathrm{Gamma}(r + s, \lambda)$.

2.1 Gammaverteilung

Definition

Eine kontinuierliche Zufallsvariable X ist Gammaverteilt von der Ordnung r mit Parameter λ mit reellen Werten $r > 0$ und $\lambda > 0$, i.Z. $X \sim \mathrm{Gamma}(r, \lambda)$, falls für die Dichte f_X von X gilt

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,\infty)}(x)\,,$$

mit der Gammafunktion

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty t^{r-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t\,.$$

Erinnerung

$\Gamma(r+1) = r \cdot \Gamma(r)$,
$\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$ und
$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Eigenschaften

1. $\mathbb{E}[X] = \frac{r}{\lambda}$,
2. $\mathrm{Var}[X] = \frac{r}{\lambda^2}$,
3. Faltungseigenschaft:
   $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$, $Y \sim \text{Gamma}(s, \lambda)$ und X, Y unabhängig
   $\implies X + Y \sim \text{Gamma}(r+s, \lambda)$.

Allgemeine Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit einer geeigneten Induktion die Verteilungsfunktion einer Gamma(n, λ)-verteilten ZV.

Bemerkung: Gesucht ist ein integralfreier Ausdruck für die Verteilungsfunktion.

In VA 1 lösen wir diese Aufgabe für $n = 3$.

Die Verteilung der Summe Y von n unabhängigen, mit Parameter λ exponentialverteilten ZV $X_1, X_2, \ldots, X_n$ heißt

Erlang-Verteilung der Ordnung n.

Sie besitzt für $x > 0$ die angegebene Dichte

$$f_Y(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}.$$

Man berechnet die Dichte durch wiederholte Faltung.

Die Exponentialverteilung ist Spezialfall der Erlangverteilung mit $n = 1$.

Die Verteilungsfunktion

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Y(t)\, dt$$

berechnet man durch partielle Integration.

Dabei tritt eine Rekursionsformel

$$F_{S_n}(x) = A + F_{S_{n-1}}(x)$$

auf, wobei S_n jeweils für Y steht.

Den gesuchten Ausdruck erhält man dann durch Aufsummieren.

Die Verteilung der Summe Y von n unabhängigen, mit Parameter λ exponentialverteilten ZV $X_1, X_2, \ldots, X_n$ heißt

Erlang-Verteilung der Ordnung n.

Sie besitzt für $x > 0$ die angegebene Dichte

$$f_Y(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}.$$

Man berechnet die Dichte durch wiederholte Faltung.

Die Exponentialverteilung ist Spezialfall der Erlangverteilung mit $n = 1$.

Die Verteilungsfunktion

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Y(t)\, dt$$

berechnet man durch partielle Integration.

Dabei tritt eine Rekursionsformel

$$F_{S_n}(x) = A + F_{S_{n-1}}(x)$$

auf, wobei S_n jeweils für Y steht.

Den gesuchten Ausdruck erhält man dann durch Aufsummieren.

2.2 Normalverteilung

Definition

Eine kontinuierliche Zufallsvariable X heißt normalverteilt mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$, i.Z. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, falls für die Dichte f_X von X gilt

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}.$$

$\mathcal{N}(0, 1)$ heißt Standardnormalverteilung.

2.2 Normalverteilung

Definition

Eine kontinuierliche Zufallsvariable X heißt normalverteilt mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$, i.Z. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, falls für die Dichte f_X von X gilt

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}.$$

$\mathcal{N}(0, 1)$ heißt Standardnormalverteilung.

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}t$$

Bezeichnung:

$$\Phi(x; \mu, \sigma) := F(x)\,.$$

$$\Phi(x) := \Phi(x; 0, 1)\,.$$

Eigenschaften

1. $\mathbb{E}[X] \quad = \mu,$
2. $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2,$
3. Faltungseigenschaft:

   $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \;\; X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$
   und X_1, X_2 unabhängig mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1^2 + a_2^2 \neq 0$
   $\implies a_1X_1 + a_2X_2 \sim \mathcal{N}(a_1\mu_1 + a_2\mu_2, a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2).$
4. Lineare Transformation:

   $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$
   $\implies aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)\,.$

3. Vorbereitung Blatt 8

3.1 VA 1

Seien X_1 und X_2 unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern λ_1 bzw. λ_2.

1. Berechnen Sie die Dichtefunktion von $Y = X_1 + X_2$ durch Anwendung der Faltungsformel

   $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) \cdot f_{X_2}(y - x) \, \mathrm{d}x$$

   und vereinfachen Sie das Ergebnis im Fall $\lambda_1 = \lambda_2$ so weit wie möglich.
2. Seien X_1, X_2, X_3 unabhängig exponentialverteilt mit gleichem Parameter λ und $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_Y in geschlossener Form.

(1)

Berechnen Sie die Dichtefunktion von $Y = X_1 + X_2$ durch Anwendung der Faltungsformel

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) \cdot f_{X_2}(y - x) \, \mathrm{d}x$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis im Fall $\lambda_1 = \lambda_2$ so weit wie möglich.

Lösung

Es gilt $f_{X_1}(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$ und $f_{X_2}(x) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$. Damit folgt, wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt, für $y \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (y-x)} \, \mathrm{d}x \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \int_0^y e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x} \, \mathrm{d}x \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \left[\frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]_{x=0}^{x=y} \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \cdot \frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)y} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\
&= \lambda_1 \lambda_2 \cdot \frac{e^{-\lambda_1 y} - e^{-\lambda_2 y}}{\lambda_2 - \lambda_1} .
\end{aligned}
$$

zue06.pdf - Adobe Acrobat Professional

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (y-x)} \, \mathrm{d}x \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \int_0^y e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x} \, \mathrm{d}x \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \left[\frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]_{x=0}^{x=y} \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \cdot \frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)y} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\
&= \lambda_1 \lambda_2 \cdot \frac{e^{-\lambda_1 y} - e^{-\lambda_2 y}}{\lambda_2 - \lambda_1} .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{\cancel{-\infty}\; 0}^{\cancel{\infty}\; y} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (y-x)} \, \mathrm{d}x \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \int_0^y e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x} \, \mathrm{d}x \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \left[\frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]_{x=0}^{x=y} \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \cdot \frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)y} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\
&= \lambda_1 \lambda_2 \cdot \frac{e^{-\lambda_1 y} - e^{-\lambda_2 y}}{\lambda_2 - \lambda_1} .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (y-x)} \, \mathrm{d}x \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \int_0^y e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x} \, \mathrm{d}x \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \left[\frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]_{x=0}^{x=y} \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \cdot \frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)y} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\
&= \lambda_1 \lambda_2 \cdot \frac{e^{-\lambda_1 y} - e^{-\lambda_2 y}}{\lambda_2 - \lambda_1} .
\end{aligned}
$$

Im Fall $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$ gilt

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(y-x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda y} \int_0^y \mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 y e^{-\lambda y}\,. \end{aligned}$$

Für $y \leq 0$ folgt in allen Fällen direkt $f_Y(y) = 0$.

Seien X_1, X_2, X_3 unabhängig exponentialverteilt mit gleichem Parameter λ und $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_Y in geschlossener Form.

Lösung

Wir wenden die Faltungsformel noch einmal an, und zwar auf $f_{X_1+X_2}$ und f_{X_3} wie folgt.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1+X_2}(x) \cdot f_{X_3}(y-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^y \lambda^2 x e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(y-x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda^3 e^{-\lambda y} \cdot \int_0^y x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^3 y^2}{2} e^{-\lambda y}\,. \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion F_Y kann nun durch Integration der Dichtefunktion f_Y berechnet werden, wie es im Folgenden ausführlich dokumentiert wird.

Wir wenden insbesondere partielle Integration an.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_Y(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^y \frac{\lambda^3 x^2}{2} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= (-\lambda^2) \int_0^y \frac{x^2}{2} \cdot (-\lambda) e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= (-\lambda^2) \left[\frac{x^2}{2} \cdot e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=y} - (-\lambda^2) \int_0^y x \cdot e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= (-\lambda^2) \frac{y^2}{2} e^{-\lambda y} - \lambda \int_0^y x \cdot (-\lambda) e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= (-\lambda^2) \frac{y^2}{2} e^{-\lambda y} - \lambda \left(\left[x \cdot e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=y} - \int_0^y e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \text{(Fortsetzung nächste Folie)} \end{aligned}$$

$$= (-\lambda^2)\frac{y^2}{2}e^{-\lambda y} - \lambda\left(\left[x \cdot e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=y} - \int_0^y e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= (-\lambda^2)\frac{y^2}{2}e^{-\lambda y} - \lambda y e^{-\lambda y} - \int_0^y (-\lambda)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$= (-\lambda^2)\frac{y^2}{2}e^{-\lambda y} - \lambda y e^{-\lambda y} - \left[e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=y}$$

$$= 1 - \frac{\lambda^2 y^2}{2}e^{-\lambda y} - \lambda y e^{-\lambda y} - e^{-\lambda y}.$$

Bemerkung

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige mit Parameter λ exponentialverteilte Zufallsvariable. Die Zufallsvariable $Y = X_1 + \ldots + X_n$ besitzt die sogenannte Erlang-Verteilung

$$F_Y(y) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda y)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda y}.$$

3.2 VA 2

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable.

1. Zeigen Sie: Falls $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$, dann gilt $2X + 1 \sim \mathcal{N}(5, 2)$.
2. Seien $d_1, d_2, c \in \mathbb{R}$ mit $d_1 < d_2$ und $c > 0$. Berechnen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass für $Y = aX + b$ gilt

$$\Pr[d_1 \le X \le d_2] = \Pr[-c \le Y \le c].$$

(2)

Seien $d_1, d_2, c \in \mathbb{R}$ mit $d_1 < d_2$ und $c > 0$.
Berechnen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass für $Y = aX + b$ gilt

$$\Pr[d_1 \le X \le d_2] = \Pr[-c \le Y \le c].$$

Lösung

Sei $a > 0$. Dann gilt

$$d_1 \le X \le d_2 \iff ad_1 + b \le Y \le ad_2 + b.$$

Wir lösen für a, b die Gleichungen

$$ad_1 + b = -c \quad \text{und} \quad ad_2 + b = c.$$

Lösung:

$$a = \frac{2c}{d_2 - d_1}, \qquad b = \frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2} \cdot c.$$

3.3 VA 3

Wir betrachten unabhängige stetige Zufallsvariablen X und Y, die beide auf dem Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ gleichverteilt sind.
Sei $Z = \max\{X, Y\}$.

1. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_Z.
2. Bestimmen Sie eine Funktion $u : [0, 1] \to [0, 1]$, so dass $u(X)$ die gleiche Verteilung wie Z besitzt.

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \Pr[Y \le y] \;=\; \Pr[u(X) \le y] \\
&= \Pr[X \le u^{-1}(y)] \\
&= F_X(u^{-1}(y)) \\
&= u^{-1}(y)\,.
\end{aligned}
$$

Aus der Gleichung $F_Z(y) = F_X(u^{-1}(y))$ folgt nun $y^2 = u^{-1}(y)$, mithin

$$u(x) = \sqrt{x}\,.$$

ue06.pdf - Adobe Acrobat Professional

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \Pr[Y \le y] \;=\; \Pr[u(X) \le y] \\
&= \Pr[X \le u^{-1}(y)] \\
&= F_X(u^{-1}(y)) \\
&= u^{-1}(y)\,.
\end{aligned}
$$

Aus der Gleichung $F_Z(y) = F_X(u^{-1}(y))$ folgt nun $y^2 = u^{-1}(y)$, mithin

$$u(x) = \sqrt{x}\,.$$

ZÜ DWT
©Dr. Werner Meixner
3.3 VA 3
27/27