Script generated by TTT

Title: Meixner: ZUE_DS_WS2014 (25.11.2014)

Date: Tue Nov 25 13:46:14 CET 2014

Duration: 88:44 min

Pages: 37

Übersicht:

1. Übungsbetrieb	Termine Fragen, Probleme, Anregungen
2. Thema	Multimengen Grundlage der Kombinatorik
3. Vorbereitung	auf TA Blatt 8

Übersicht:

1. Übungsbetrieb	Termine Fragen, Probleme, Anregungen
2. Thema	Multimengen Grundlage der Kombinatorik
3. Vorbereitung	auf TA Blatt 8

ZÜ DS
©Dr. Werner Meixner
1/38

1. Übungsbetrieb

1.1 Termine

In der Woche Montag, 1.12. bis Freitag, 5.12.2014 findet keine Zentralübung statt.

Dies entspricht dem seit Semesterbeginn veröffentlichten Terminplan für die Zentralübung (siehe Übungswebseite).

Am Donnerstag, den 4. Dezember (dies academicus) finden keine Übungen statt. Die betroffenen Teilnehmer gehen bitte in genannten Woche als Gast in eine andere Gruppe ihrer Wahl.

1.2 Fragen, Anregungen?

Fragen?

Anregungen?

Information: Für die Korrektur der Hausaufgaben gelten ab sofort die Korrekturregeln siehe Webseite.

2. Thema: Multimengen Grundlage der Kombinatorik

Fundamental für den systematischen Vergleich und die Klassifizierung von Zählproblemen ist der Begriff der

unterscheidbaren bzw. nicht unterscheidbaren Elemente,

d.h. der Begriff der

Multimenge und Zuordnung von Multimengen.

Eine exemplarische Durchführung einer Klassifizierung von Zählproblemen auf der Grundlage von Multimengen wird in der Vorlesung in einer tabellarischen Zusammenfassung vorgestellt werden.

2. Thema: Multimengen Grundlage der Kombinatorik

Fundamental für den systematischen Vergleich und die Klassifizierung von Zählproblemen ist der Begriff der

unterscheidbaren bzw. nicht unterscheidbaren Elemente,

d.h. der Begriff der

Multimenge und Zuordnung von Multimengen.

Eine exemplarische Durchführung einer Klassifizierung von Zählproblemen auf der Grundlage von Multimengen wird in der Vorlesung in einer tabellarischen Zusammenfassung vorgestellt werden.

2.1 Begriffe

Multimengen und Unterscheidbarkeit:

Der Begriff einer Multimenge basiert auf der Idee, dass von Elementen einer Menge beliebig viele gleiche, d. h. *nicht unterscheidbare Exemplare* erzeugt und

eine beliebige Gesamtheit von unterscheidbaren oder nicht unterscheidbaren Exemplaren zu einer neuen Struktur zusammengefasst werden können.

Definition:

Eine *Multimenge* M *über einer Menge* B ist eine Zusammenfassung von *Exemplaren* von Elementen der Menge B (z.B. $M = \langle a, a, b \rangle$).

Exemplare eines einzelnen Elements $a \in B$ sind dabei nicht unterscheidbar.

Ein Exemplar eines Elements $a \in B$ und ein Exemplar eines Elements $b \in B$ sind unterscheidbar genau dann, wenn $a \neq b$ gilt.

Exemplare werden erzeugt, als logischer Willensakt (logisch konstruiert), und syntaktisch bezeichnet.

Ein Mengenelement x, zu dem ein Exemplar erzeugt wird, kann man *Bestimmungselement* des erzeugten Exemplars nennen.

Demnach kann man zu jeder Multimenge M die Menge B_M aller Bestimmungselemente der Elemente von M bilden. Zwei Elemente einer Multimenge sind *unterscheidbar* genau dann, wenn ihre Bestimmungselemente verschieden sind.

Eine Multimenge N ist eine *Teil-Multimenge* einer Multimenge M, falls von jedem Element x einer beliebigen Menge höchstens so viele Exemplare in N enthalten sind, wie Exemplare davon in M enthalten sind.

Eine Partition einer Multimenge M ist eine Aufteilung von M in disjunkte Teil-Multimengen.

Ein Mengenelement x, zu dem ein Exemplar erzeugt wird, kann man *Bestimmungselement* des erzeugten Exemplars nennen.

Demnach kann man zu jeder Multimenge M die Menge B_M aller Bestimmungselemente der Elemente von M bilden. Zwei Elemente einer Multimenge sind *unterscheidbar* genau dann, wenn ihre Bestimmungselemente verschieden sind.

Eine Multimenge N ist eine *Teil-Multimenge* einer Multimenge M, falls von jedem Element x einer beliebigen Menge höchstens so viele Exemplare in N enthalten sind, wie Exemplare davon in M enthalten sind.

Eine Partition einer Multimenge M ist eine Aufteilung von M in disjunkte Teil-Multimengen.

Ein Mengenelement x, zu dem ein Exemplar erzeugt wird, kann man *Bestimmungselement* des erzeugten Exemplars nennen.

Demnach kann man zu jeder Multimenge M die Menge B_M aller Bestimmungselemente der Elemente von M bilden. Zwei Elemente einer Multimenge sind *unterscheidbar* genau dann, wenn ihre Bestimmungselemente verschieden sind.

Eine Multimenge N ist eine *Teil-Multimenge* einer Multimenge M, falls von jedem Element x einer beliebigen Menge höchstens so viele Exemplare in N enthalten sind, wie Exemplare davon in M enthalten sind.

Eine Partition einer Multimenge M ist eine Aufteilung von M in disjunkte Teil-Multimengen.

Zuordnung von Multimengen:

Der Begriff der *Abbildung oder Zuordnung einer Multimenge N in eine Multimenge R* wird anschaulich durch das Bild der Verteilung von Bällen aus N auf Schachteln oder Boxen aus R definiert, wobei die Elemente aus N als *Bälle* und die Elemente aus R als *Boxen* bezeichnet werden.

Wir schreiben für Mengen oder (homogene) Multimengen X jeweils

$$X\{\neq\} \quad \text{bzw.} \quad X\{=\}\,, \qquad \text{falls } X \text{ aus}$$

unterscheidbaren (ungleichen) bzw.
nicht unterscheidbaren (gleichen)

Elementen besteht.

Zuordnung von Multimengen:

Der Begriff der *Abbildung oder Zuordnung einer Multimenge N in eine Multimenge R* wird anschaulich durch das Bild der Verteilung von Bällen aus N auf Schachteln oder Boxen aus R definiert, wobei die Elemente aus N als *Bälle* und die Elemente aus R als *Boxen* bezeichnet werden.

Wir schreiben für Mengen oder (homogene) Multimengen X jeweils

$$X\{\neq\} \quad \text{bzw.} \quad X\{=\}\,, \qquad \text{falls } X \text{ aus}$$

unterscheidbaren (ungleichen) bzw.
nicht unterscheidbaren (gleichen)

Elementen besteht.

$N \longrightarrow R$ $\lvert N\rvert = n,\ \lvert R\rvert = r$	1 beliebig	2 injektiv	3 surjektiv	4 bijektiv $(r=n)$
$A:\ N\{\neq\} \longrightarrow R\{\neq\}$				
$B:\ N\{=\} \longrightarrow R\{\neq\}$				
$C:\ N\{\neq\} \longrightarrow R\{=\}$				
$D:\ N\{=\} \longrightarrow R\{=\}$				

Wir werden in diese Tabelle sukzessive Formeln zur Bestimmung der Anzahl von Zuordnungen eintragen.

Ziehen: geordnet mit Zurücklegen:

$N \longrightarrow R$ $\lvert N\rvert = n,\ \lvert R\rvert = r$	1 beliebig	2 injektiv	3 surjektiv	4 bijektiv $(r=n)$
$A:\ N\{\neq\} \longrightarrow R\{\neq\}$	r^n			
$B:\ N\{=\} \longrightarrow R\{\neq\}$				
$C:\ N\{\neq\} \longrightarrow R\{=\}$				
$D:\ N\{=\} \longrightarrow R\{=\}$				

Anzahl der n-Tupel über R.

Ziehen: geordnet ohne Zurücklegen:

$N \longrightarrow R$ $\lvert N\rvert = n,\ \lvert R\rvert = r$	1 beliebig	2 injektiv	3 surjektiv	4 bijektiv $(r=n)$
$A: N\{\neq\} \longrightarrow R\{\neq\}$	r^n	$r^{\underline{n}}$		
$B: N\{=\} \longrightarrow R\{\neq\}$				
$C: N\{\neq\} \longrightarrow R\{=\}$				
$D: N\{=\} \longrightarrow R\{=\}$				

Anzahl der n-Variationen von R.

Ziehen: ungeordnet mit Zurücklegen:

$N \longrightarrow R$ $\lvert N\rvert = n,\ \lvert R\rvert = r$	1 beliebig	2 injektiv	3 surjektiv	4 bijektiv $(r=n)$
$A: N\{\neq\} \longrightarrow R\{\neq\}$	r^n	$r^{\underline{n}}$		
$B: N\{=\} \longrightarrow R\{\neq\}$	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!} = \binom{r+n-1}{n}$			
$C: N\{\neq\} \longrightarrow R\{=\}$				
$D: N\{=\} \longrightarrow R\{=\}$				

Anzahl der n-elementigen Multi-Teilmengen von R.

Ziehen: ungeordnet mit Zurücklegen:

$N \longrightarrow R$ $\lvert N\rvert = n,\ \lvert R\rvert = r$	1 beliebig	2 injektiv	3 surjektiv	4 bijektiv $(r=n)$
$A: N\{\neq\} \longrightarrow R\{\neq\}$	r^n	$r^{\underline{n}}$		
$B: N\{=\} \longrightarrow R\{\neq\}$	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!} = \binom{r+n-1}{n}$			
$C: N\{\neq\} \longrightarrow R\{=\}$				
$D: N\{=\} \longrightarrow R\{=\}$				

Anzahl der n-elementigen Multi-Teilmengen von R.

Ziehen: ungeordnet ohne Zurücklegen:

$N \longrightarrow R$ $\lvert N\rvert = n,\ \lvert R\rvert = r$	1 beliebig	2 injektiv	3 surjektiv	4 bijektiv $(r=n)$
$A: N\{\neq\} \longrightarrow R\{\neq\}$	r^n	$r^{\underline{n}}$		
$B: N\{=\} \longrightarrow R\{\neq\}$	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!} = \binom{r+n-1}{n}$	$\frac{r^{\underline{n}}}{n!} = \binom{r}{n}$		
$C: N\{\neq\} \longrightarrow R\{=\}$				
$D: N\{=\} \longrightarrow R\{=\}$				

Anzahl der n-elementigen Teilmengen von R.

Basis für eine Klassifizierung kombinatorischer Aufgabenstellungen und Lösungen:

Die Formeln der Tabelle gelten für alle $n, r \in \mathbb{N}_0$.

$N \longrightarrow R$ $\lvert N\rvert = n,\ \lvert R\rvert = r$	1 beliebig	2 injektiv	3 surjektiv	4 bijektiv $(r=n)$
$A:\ N\{\neq\} \longrightarrow R\{\neq\}$	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r!S_{n,r}$	$r! = n!$
$B:\ N\{=\} \longrightarrow R\{\neq\}$	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\frac{r^{\underline{n}}}{n!} = \binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
$C:\ N\{\neq\} \longrightarrow R\{=\}$	$\sum_{i=0}^{r} S_{n,i}$	1 oder 0	$S_{n,r}$	1
$D:\ N\{=\} \longrightarrow R\{=\}$	$\sum_{i=0}^{r} P_{n,i}$	1 oder 0	$P_{n,r}$	1

3. Vorbereitung auf TA Blatt 8

3.1 VA 1, Zählen von Relationen und Mengen

Sei $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Wir betrachten die Menge aller Relationen $R \subseteq M \times M$.

1. Wie viele Relationen über M gibt es?

Lösung:

Die Anzahl $\text{anz}_{Rel}(M)$ der Relationen über M ist gleich der Anzahl der Teilmengen von $M \times M$.

Wegen $|M \times M| = m^2$ gilt

$$\text{anz}_{Rel}(M) = |\mathcal{P}(M \times M)| = 2^{m^2}.$$

3. Vorbereitung auf TA Blatt 8

3.1 VA 1, Zählen von Relationen und Mengen

Sei $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Wir betrachten die Menge aller Relationen $R \subseteq M \times M$.

1. Wie viele Relationen über M gibt es?

Lösung:

Die Anzahl $\text{anz}_{Rel}(M)$ der Relationen über M ist gleich der Anzahl der Teilmengen von $M \times M$.

Wegen $|M \times M| = m^2$ gilt

$$\text{anz}_{Rel}(M) = |\mathcal{P}(M \times M)| = 2^{m^2}.$$

2. Wie viele Relationen über M mit $k \in \mathbb{N}_0$ Elementen gibt es?

Lösung:

Die Frage ist,
wie viele Teilmengen mit k Elementen besitzt $M \times M$,
d. h., welchen Wert besitzt $|\{R \in \mathcal{P}(M \times M)\ ;\ |R| = k\}|$?

Nach Vorlesung besitzt jede Menge mit m Elementen genau

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

k-elementige Teilmengen.

Damit gilt für $k \leq m^2$ (und auch für $k > m^2$)

$$|\{R \in \mathcal{P}(M \times M)\ ;\ |R| = k\}| = \binom{m^2}{k}.$$

3. Wie viele reflexive Relationen über M gibt es?

Lösung:

Zur Konstruktion einer reflexiven Relation über M entfernt man zunächst aus $M \times M$ alle m Paare (x, x) der Identität Id_M,

nimmt dann eine Teilmenge der Restmenge und

fügt anschließend alle Paare der Identität wieder hinzu.

Man beachte, dass das abschließende Hinzufügen der Identität eine injektive Operation darstellt.

Entsprechend erhält man die Anzahl anz_{refRel} der reflexiven Relationen über M wie folgt.

$$\mathrm{anz}_{refRel}(M) = |\mathcal{P}((M \times M) \setminus \mathrm{Id}_M)| = 2^{m^2-m}.$$

3. Wie viele reflexive Relationen über M gibt es?

Lösung:

Zur Konstruktion einer reflexiven Relation über M entfernt man zunächst aus $M \times M$ alle m Paare (x, x) der Identität Id_M,

nimmt dann eine Teilmenge der Restmenge und

fügt anschließend alle Paare der Identität wieder hinzu.

Man beachte, dass das abschließende Hinzufügen der Identität eine injektive Operation darstellt.

Entsprechend erhält man die Anzahl anz_{refRel} der reflexiven Relationen über M wie folgt.

$$\mathrm{anz}_{refRel}(M) = |\mathcal{P}((M \times M) \setminus \mathrm{Id}_M)| = 2^{m^2-m}.$$

3. Wie viele reflexive Relationen über M gibt es?

Lösung:

Zur Konstruktion einer reflexiven Relation über M entfernt man zunächst aus $M \times M$ alle m Paare (x, x) der Identität Id_M,

nimmt dann eine Teilmenge der Restmenge und

fügt anschließend alle Paare der Identität wieder hinzu.

Man beachte, dass das abschließende Hinzufügen der Identität eine injektive Operation darstellt.

Entsprechend erhält man die Anzahl anz_{refRel} der reflexiven Relationen über M wie folgt.

$$\mathrm{anz}_{refRel}(M) = |\mathcal{P}((M \times M) \setminus \mathrm{Id}_M)| = 2^{m^2-m}.$$

3. Wie viele reflexive Relationen über M gibt es?

Lösung:

Zur Konstruktion einer reflexiven Relation über M entfernt man zunächst aus $M \times M$ alle m Paare (x, x) der Identität Id_M,

nimmt dann eine Teilmenge der Restmenge und

fügt anschließend alle Paare der Identität wieder hinzu.

Man beachte, dass das abschließende Hinzufügen der Identität eine injektive Operation darstellt.

Entsprechend erhält man die Anzahl anz_{refRel} der reflexiven Relationen über M wie folgt.

$$\mathrm{anz}_{refRel}(M) = |\mathcal{P}((M \times M) \setminus \mathrm{Id}_M)| = 2^{m^2-m}.$$

4. Sei A eine n-elementige Menge und es sei B eine m-elementige Teilmenge von A.

   Wie viele Teilmengen C von A gibt es, die B enthalten, für den Fall $n = 5$ und $m = 2$?

   Geben Sie eine Formel für den allgemeinen Fall $n, m \in \mathbb{N}_0$ an und begründen Sie diese Formel.

Lösung:

Sei $B \subseteq A$.
Seien $A' := A \setminus B$ und $[B, A] := \{C \subseteq A\ ;\ B \subseteq C \subseteq A\}$.

Dann ist $f : [B, A] \to \mathcal{P}(A')$ mit $f(C) = C \setminus B$ eine bijektive Abbildung von $[B, A]$ auf $\mathcal{P}(A')$.

Es gilt wegen $|A'| = n - m$

$$|\mathcal{P}(A')| = 2^{n-m}.$$

Für $n = 5$ und $m = 2$ ergibt sich $|\mathcal{P}(A')| = 2^3 = 8$.

3.2 VA 2, Zählen von Abbildungen

Sei $M = \{0, 1, 2\}$.

1. Listen Sie alle Äquivalenzrelationen über M auf!

Lösung:

Äquivalenzrelationen sind durch die Menge ihrer zugeordneten Äquivalenzklassen bestimmt.

Über der Grundmenge M mit 3 Elementen gibt es

Äquivalenzrelationen mit 3 Klassen,

mit 2 Klassen und

mit einer einzigen Klasse.

Die Menge der zugeordneten Klassen bildet eine Partition P der Grundmenge M.

Äquivalenzrelationen mit
1 Klasse: $P_{1,1} = \{\{0,1,2\}\}$.

Äquivalenzrelationen mit
2 Klassen: $P_{2,1} = \{\{0\},\{1,2\}\}$.
$P_{2,2} = \{\{1\},\{0,2\}\}$.
$P_{2,3} = \{\{2\},\{1,0\}\}$.

Äquivalenzrelationen mit
3 Klassen: $P_{3,1} = \{\{1\},\{2\},\{0\}\}$.

2. Wie viele Partitionen gibt es über M?

Lösung:

Die Partitionen entsprechen eineindeutig den Äquivalenzrelationen.

Also gibt es 5 Partitionen über M.

3. Gibt es eine Äquivalenzrelation über der leeren Menge?

Lösung:

Falls $M = \emptyset$,
dann ist $R = \emptyset$ eine Äquivalenzrelation über M.

Aus $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ folgt,
dass $\emptyset$ die einzige Relation über $\emptyset$ ist.

Die Menge der Klassen dieser Relation R ist leer.
Damit entspricht die leere Menge von Klassen in diesem Fall einer (einzigen) Partition von M.

5. Wie viele injektive Operationen $f : M \to M$ gibt es?

Lösung:

Eine injektive Operation über einer endlichen Menge M ist gleichzeitig surjektiv und damit bijektiv.

Für die Abbildung von 0 gibt es 3 Möglichkeiten.

Für jede dieser Möglichkeiten gibt es dann 2 Möglichkeiten der Abbildung des Elementes 1.

Damit erhalten wir $2 \cdot 3 = 6$ injektive Operationen über M.

6. Geben Sie alle Variationen von M an!

Die Begriffe k-Variation und k-Permutation sind synonym.

Lösung:

Eine k-Variation (k-Permutation) einer Menge A wurde als Sequenz $q_1, q_2, \ldots, q_k$ der Länge k von paarweise verschiedenen Elementen q_i aus A definiert.

Eine k-Variation mit $k = |A|$ wird Permutation von A genannt.

Wir ordnen jeder Variation $q_1, q_2, \ldots, q_k$ über einer endlichen Menge A in eineindeutiger Weise eine bijektive Abbildung $f : [1, k] \to A$ wie folgt zu

$$f(i) = q_i\,.$$

6. Geben Sie alle Variationen von M an!

Die Begriffe k-Variation und k-Permutation sind synonym.

Lösung:

Eine k-Variation (k-Permutation) einer Menge A wurde als Sequenz $q_1, q_2, \ldots, q_k$ der Länge k von paarweise verschiedenen Elementen q_i aus A definiert.

Eine k-Variation mit $k = |A|$ wird Permutation von A genannt.

Wir ordnen jeder Variation $q_1, q_2, \ldots, q_k$ über einer endlichen Menge A in eineindeutiger Weise eine bijektive Abbildung $f : [1, k] \to A$ wie folgt zu

$$f(i) = q_i\,.$$

ZÜ DS
©Dr. Werner Meixner
27/38