Script generated by TTT

Title: Meixner: ZUE_DS_WS2014 (12.11.2014)

Date: Wed Nov 12 16:59:27 CET 2014

Duration: 110:03 min

Pages: 61

WS 2014/15

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Bungartz)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2014WS/ds/uebung/

12. November 2014

Übersicht:

1. Übungsbetrieb	Fragen, Probleme?
2. Thema	Beweisführung und Beweisarten - informell präzis - direkt, indirekt, durch Widerspruch
3. Thema	Beweis durch Induktion
4. Vorbereitung	auf TA Blatt 6
5. Nachtrag	VA 5 von Blatt 5

1. Fragen, Anregungen?

Fragen?

Anregungen?

1.1 „Das Versteh' ich nicht!“

Falsche Lesetechnik? Lesen und hören Sie strukturiert!

Eine Definition wird zunächst syntaktisch funktional analysiert.

Ein inhaltliches Verständnis entsteht in nachfolgenden Schritten.

1.1 „Das Versteh' ich nicht!“

Falsche Lesetechnik? Lesen und hören Sie strukturiert!

Eine Definition wird zunächst syntaktisch funktional analysiert.

Ein inhaltliches Verständnis entsteht in nachfolgenden Schritten.

2. Thema: Beweisführung

2.1 Informell präzise Beweise

Wir haben über mathematische Gegenstände bereits so viel gelernt, dass wir **präzise** mathematische Beweise verstehen und selbst formulieren können.

Wenn wir dabei nur Bezug nehmen auf die natürliche Sprache und

„gesunden Menschenverstand“,

dann sind diese Beweise **informell**.

Bemerkung:
Das informelle Verständnis von mathematischen Gegenständen ist eine selbstverständliche Voraussetzung jeglicher Formalisierung von Inhalten.

2.1.1 Überführung von Aussagen in Beweise

Aussagen können durch Verfahren (Vorgänge) interpretiert und bewiesen werden und umgekehrt.

Eine Aussage der Form

$$A \rightarrow B \qquad \text{(Implikation)}$$

kann bewiesen werden durch

Annahme:	Es gilt A.	
Dann	wird B bewiesen.	(Inferenz)

2.1.2 Beispiel Distributivität des Relationenprodukts

Für alle Mengen M und binäre Relationen R, S, T über M, d. h. $R, S, T \subseteq M \times M$, gilt die Distributivität des Relationenprodukts $\circ$ gegenüber der Mengenvereinigung $\cup$ von Relationen, d.h., es gilt

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)\,.$$

2.1.2 Beispiel Distributivität des Relationenprodukts

Für alle Mengen M und binäre Relationen R, S, T über M, d. h. $R, S, T \subseteq M \times M$, gilt die Distributivität des Relationenprodukts $\circ$ gegenüber der Mengenvereinigung $\cup$ von Relationen, d.h., es gilt

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)\,.$$

Bemerkung:

Es wird auch gerne die folgende andere Sprechweise für die Formulierung der Voraussetzungen einer Behauptung gewählt:

„Seien M eine Menge und R, S, T binäre Relationen über M ...“ bedeutet, dass die obige Gleichung für alle M, R, S und T gilt.

Man kann auch sagen
„Seien M eine beliebig gewählte Menge und
R, S, T beliebig gewählte binäre Relationen über M“.

Um obige Distributivität beweisen zu können, braucht in allen Fällen nur $R, S, T \subseteq M \times M$ und sonst nichts bekannt zu sein.

Beweis:

Wir verwandeln nun die obige Behauptung in ein Verfahren zur Berechnung ihres Wahrheitswertes.

Der erste Schritt ist immer die Annahme, dass die Voraussetzungen alle gelten. Dazu dient der Text:

Seien M eine beliebig gewählte Menge und R, S, T beliebig gewählte binäre Relationen über M.

In unserem logischen Denkraum haben wir nun Platzhalter für die angenommenen Objekte M, R, S, T erzeugt.

Wir müssen nun für diese Objekte eine Mengengleichung $U = V$ beweisen, die nichts anderes bedeutet als die Konjunktion von Implikationen:

Für alle $x \in M \times M$ gilt

$$x \in U \to x \in V \quad \text{und} \quad x \in V \to x \in U\,.$$

Hier sind $U = R \circ (S \cup T)$ und $V = (R \circ S) \cup (R \circ T)$ gesetzt.

Wir müssen nun für diese Objekte eine Mengengleichung $U = V$ beweisen, die nichts anderes bedeutet als die Konjunktion von Implikationen:

Für alle $x \in M \times M$ gilt

$$x \in U \to x \in V \quad \text{und} \quad x \in V \to x \in U\,.$$

Hier sind $U = R \circ (S \cup T)$ und $V = (R \circ S) \cup (R \circ T)$ gesetzt.

Wir beweisen zunächst für alle $x \in M \times M$ die Implikation

$$x \in R \circ (S \cup T) \ \to\ x \in (R \circ S) \cup (R \circ T)$$

wie folgt.

Zweiter Schritt:

Wenn für alle x einer Menge eine Implikation gezeigt werden soll, dann nimmt man einfach ein x an, das die Prämisse der Implikation erfüllt. Also:

Sei $x \in M \times M$, so dass $x \in R \circ (S \cup T)$ gilt.

Da x ein Tupel ist, können wir gleichzeitig $x = (u, v)$ annehmen mit irgenwelchen $u, v \in M$, über die wir natürlich zunächst nichts Näheres wissen.

Allerdings wissen wir, dass $x \in R \circ (S \cup T)$ gilt, d. h.

$$x = (u, v) \in R \circ (S \cup T)\,.$$

Dies bedeutet, dass (u, v) aus den Relationen R und $S \cup T$ hervorgeht, und zwar durch Produktbildung.

Es muss folglich ein Element $w \in M$ existieren, so dass sowohl $(u, w) \in R$ gilt als auch $(w, v) \in (S \cup T)$.

Wir können also annehmen:

Sei $w \in M$, so dass $(u, w) \in R$ und $(w, v) \in (S \cup T)$ gilt.

Wir haben nun alle Informationen beisammen, die wir aus den Prämissen ableiten können.

Was aber müssen wir nun zeigen?

Zu zeigen ist:

$$x \in (R \circ S) \cup (R \circ T)\,. \qquad (*)$$

Natürlich können wir für den Beweis nun alles benützen, was wir an Informationen haben.

Also $x = (u, v)$ und $(u, w) \in R$ und $(w, v) \in (S \cup T)$.

Da wir nicht wissen, ob $(w, v) \in S$ oder $(w, v) \in T$ gilt, müssen wir prüfen, ob in beiden Fällen die Aussage $(*)$ ableitbar ist.

Wir müssen eine Fallunterscheidung machen!

Fallunterscheidung

Fall 1: $(w, v) \in S$.

Wir haben $(u, w) \in R$ und $(w, v) \in S$, d.h. definitionsgemäß $(u, v) \in R \circ S$.

Daraus folgt wegen Mengeninklusion $(R \circ S) \subseteq (R \circ S) \cup (R \circ T)$, dass $(u, v) \in (R \circ S) \cup (R \circ T)$ gilt, d.h.

$$x \in (R \circ S) \cup (R \circ T)\,.$$

Fall 2: $(w, v) \in T$.

Analog folgt

$$x \in (R \circ S) \cup (R \circ T)\,.$$

W.z.b.w.

Nun bleibt der Beweis der umgekehrten Implikation.

Für alle $x \in M \times M$ gilt

$$x \in (R \circ S) \cup (R \circ T) \implies x \in R \circ (S \cup T)$$

Den Beweis dieser Umkehrung wollen wir dem Leser überlassen. Er ist weitgehend analog dem schon vorgestellten Beweis.

Im Folgenden wollen wir im Vorgriff auf prädikatenlogische Identitäten einen sehr kurz erscheinenden Beweis darstellen, der äquivalente Umformungen von Ausdrücken benutzt.

Vorausblick auf kompakten Äquivalenzbeweis.
Dabei lesen wir zunächst das Zeichen $\exists w$ ganz informell als „es existiert w“ in der natürlichen Wortbedeutung:

$$
\begin{aligned}
&(u,v) \in R \circ (S \cup T) \\
&\quad \equiv \quad \exists w \; (\, (u,w) \in R \;\wedge\; (w,v) \in (S \cup T)\,) \\
&\quad \equiv \quad \exists w \; (\, (u,w) \in R \;\wedge\; ((w,v) \in S \vee (w,v) \in T)\,) \\
&\quad \equiv \quad \exists w \; (\, ((u,w) \in R \wedge (w,v) \in S) \;\vee\; ((u,w) \in R \wedge (w,v) \in T)\,) \\
&\quad \equiv \quad \exists w \; ((u,w) \in R \wedge (w,v) \in S) \quad \vee \\
&\qquad\qquad \exists w \; ((u,w) \in R \wedge (w,v) \in T)) \\
&\quad \equiv \quad (u,v) \in R \circ S \;\vee\; (u,v) \in R \circ T \;\equiv \\
&(u,v) \in (R \circ S \cup R \circ T)\,.
\end{aligned}
$$

Bemerkungen:

Der ursprüngliche Beweis der Gleichung erscheint sehr aufwendig aber elementar.

Der äquivalenzbasierte Beweis ist wesentlich kürzer.

Man lernt daraus, dass der mathematische Formalismus auf engstem Raum eine große Informationsmenge darstellen kann.

Allerdings ersetzt der eine Beweis nicht den anderen, wenn es um das Verständnis der Inhalte geht.

Bemerkungen:

Der ursprüngliche Beweis der Gleichung erscheint sehr aufwendig aber elementar.

Der äquivalenzbasierte Beweis ist wesentlich kürzer.

Man lernt daraus, dass der mathematische Formalismus auf engstem Raum eine große Informationsmenge darstellen kann.

Allerdings ersetzt der eine Beweis nicht den anderen, wenn es um das Verständnis der Inhalte geht.

2.2 Beweisarten

1. *Direkter Beweis:*
   Geben Sie für die folgende Aussage einen direkten Beweis an.

   Das arithmetische Mittel $b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ von n Zahlen a_i, $1 \le i \le n$ bleibt unverändert, falls die Folge der a_i mit beliebig vielen b's erweitert wird, d. h.

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + m \cdot b\right).$$

2.2 Beweisarten

1. *Direkter Beweis*:
   Geben Sie für die folgende Aussage einen direkten Beweis an.

   Das arithmetische Mittel $b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ von n Zahlen a_i, $1 \le i \le n$ bleibt unverändert, falls die Folge der a_i mit beliebig vielen $b's$ erweitert wird, d. h.

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \;=\; \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m \cdot b\right) .$$

Bemerkung:
Auch leeren Summen wird ein Wert zugewiesen,
und zwar das jeweilige „neutrale“ Element der Operation,
d. h. hier 0 für die leere Summe.

Eine leere Summe liegt z. B. immer dann vor,
wenn der Laufindex i bei i_0 beginnt, aber $n < i_0$ gilt,
d. h. wir setzen $i_0 \le i \le n$ voraus.

2.2 Beweisarten

1. *Direkter Beweis*:
   Geben Sie für die folgende Aussage einen direkten Beweis an.

   Das arithmetische Mittel $b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ von n Zahlen a_i, $1 \le i \le n$ bleibt unverändert, falls die Folge der a_i mit beliebig vielen $b's$ erweitert wird, d. h.

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \;=\; \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m \cdot b\right) .$$

ZÜ DS
©Dr. Werner Meixner 2.2 Beweisarten 19/48

Bemerkung:
Auch leeren Summen wird ein Wert zugewiesen,
und zwar das jeweilige „neutrale“ Element der Operation,
d. h. hier 0 für die leere Summe.

Eine leere Summe liegt z. B. immer dann vor,
wenn der Laufindex i bei i_0 beginnt, aber $n < i_0$ gilt,
d. h. wir setzen $i_0 \le i \le n$ voraus.

ZÜ DS
©Dr. Werner Meixner 2.2 Beweisarten 20/48

Lösung:

Intuitiv ist klar, dass die Hinzunahme des Wertes des arithmetischen Mittels zu den Werten, über die das Mittel gebildet wird, das Mittel selbst nicht verändert.

Die entsprechende Rechnung ist wie folgt.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m\cdot b\right) &= \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\\ &= \frac{1}{n+m}\left(1+\frac{m}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} a_i\\ &= \frac{1}{n+m}\left(\frac{n+m}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} a_i\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\,.\end{aligned}$$

2. *Indirekter Beweis*:
   Es seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $m > n \cdot k$.
   Zeigen Sie:

   Verteilt man m Hamster auf n Käfige, so befinden sich in mindestens einem Käfig $k+1$ oder mehr Hamster.

   Führen Sie einen indirekten Beweis, indem Sie annehmen, in allen Käfigen würden sich nach einer Verteilung weniger als $k+1$ Hamster befinden.

Lösung:

Die Voraussetzung $m > n \cdot k$ bezeichnen wir als Aussage A.

Wir bezeichnen die Anzahl der in Käfig i $(1 \le i \le n)$ befindlichen Hamster als h_i.

Zu zeigen ist dann die Aussage B mit

$$B = (\exists i, 1 \le i \le n)\ [h_i \ge k+1]\,.$$

Insgesamt haben wir also die Implikation $A \to B$ zu zeigen.

Indirekter Beweis:
Wir zeigen die Kontraposition von $A \to B$, d. h.

$$\neg B \to \neg A\,.$$

Annahme: Es gelte $\neg B$, d. h., für alle i gelte $h_i < k+1$.

Wegen $h_i \le k$ schätzen wir die Gesamtzahl m aller Hamster in den Käfigen ab mit

$$m = \sum_{i=1}^{n} h_i \le \sum_{i=1}^{n} k = n \cdot k\,.$$

Damit ist die Negation der Voraussetzung $m > n \cdot k$ gezeigt, mithin Aussage $\neg A$.

Widerspruchsbeweis:
Wir zeigen $A, \neg B \rightarrow \text{false}$.

Beispiel siehe TA 3.

3. Beweis durch Induktion

Mit einem Induktionsbeweis beweist man die Wahrheitswerte einer aufgezählten Menge von Aussagen

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$$

durch eine Aufzählung der Beweise B_i für die Aussagen A_i

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n, \ldots .$$

Man beweist dabei die erste der Aussagen,
d.h. A_1, und eine Folgerung $A_n \rightarrow A_{n+1}$ für beliebiges $n \geq 1$.

Daraus ergibt sich dann eine Aufzählung der Beweise B_i.

Man beachte:

Die Variable n bedeutet lediglich den Index in der Aufzählung der Aussagen A_n bzw. Beweise B_n.

Selbstverständlich beginnt der Index einer Aufzählung bei 1 und ist aufsteigend unendlich.

Die Aussagen A_n haben stets die Form

Es gilt $P(n)$.

Dabei ist $P(n)$ ein Prädikat, das sich auf den Index n bezieht.

Sei $P(n)$ ein Prädikat für natürliche Zahlen.

Die Gültigkeit einer Formel

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \qquad (1)$$

mit vollständiger Induktion zu beweisen, heißt,

anstatt (1) die Gültigkeit der folgenden Formel zu zeigen.

$$P(1) \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N} : (P(n) \rightarrow P(n+1)) . \qquad (2)$$

Bemerkung: Wir benützen hier in der Mathematik gebräuchliche Schreibweisen für prädikatenlogische Formeln.

Sei $P(n)$ ein Prädikat für natürliche Zahlen.

Die Gültigkeit einer Formel

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; P(n) \tag{1}$$

mit vollständiger Induktion zu beweisen, heißt,

anstatt (1) die Gültigkeit der folgenden Formel zu zeigen.

$$P(1) \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N}: (P(n) \rightarrow P(n+1)) \,. \tag{2}$$

Bemerkung: Wir benützen hier in der Mathematik gebräuchliche Schreibweisen für prädikatenlogische Formeln.

Sei $P(n)$ ein Prädikat für natürliche Zahlen.

Die Gültigkeit einer Formel

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; P(n) \tag{1}$$

mit vollständiger Induktion zu beweisen, heißt,

anstatt (1) die Gültigkeit der folgenden Formel zu zeigen.

$$P(1) \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N}: (P(n) \rightarrow P(n+1)) \,. \tag{2}$$

Bemerkung: Wir benützen hier in der Mathematik gebräuchliche Schreibweisen für prädikatenlogische Formeln.

Bemerkung: Das Prädikat $P(n)$ ist häufig nicht identisch mit der Aussage, die man beweisen will. Die Frage der Anpassung des Schemas an z.B. absteigende Folgen ganzer Zahlen oder den Induktionsanfang stellt sich nicht.

Die Anpassung geschieht stets durch

Wahl eines geeigneten Prädikats.

3.1 Beispiel Induktion

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$ und $m \in \mathbb{N}_0$
die Bernoullische Ungleichung

$$1 + mx \leq (1+x)^m \,.$$

Geben Sie zunächst ein geeignetes Prädikat $P(n)$ an und führen Sie den Induktionsbeweis für beliebiges x unter der Annahme $-1 < x$ nach dem angegebenen Schema durch.

3.1 Beispiel Induktion

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$ und $m \in \mathbb{N}_0$
die Bernoullische Ungleichung

$$1 + mx \leq (1+x)^m .$$

Geben Sie zunächst ein geeignetes Prädikat $P(n)$ an
und führen Sie den Induktionsbeweis
für beliebiges x unter der Annahme $-1 < x$
nach dem angegebenen Schema durch.

©Dr. Werner Meixner

3.1 Beispiel Induktion

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$ und $m \in \mathbb{N}_0$
die Bernoullische Ungleichung

$$1 + mx \leq (1+x)^m .$$

Geben Sie zunächst ein geeignetes Prädikat $P(n)$ an
und führen Sie den Induktionsbeweis
für beliebiges x unter der Annahme $-1 < x$
nach dem angegebenen Schema durch.

©Dr. Werner Meixner

Lösung:

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$.

Wir definieren das Prädikat $P(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ so, dass $P(n)$
genau dann wahr ist, wenn $1 + (n-1)x \leq (1+x)^{n-1}$ gilt, i.Z.

$$P(n) \quad :\Longleftrightarrow \quad 1 + (n-1)x \leq (1+x)^{n-1} .$$

Dann haben wir zu zeigen

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n) .$$

©Dr. Werner Meixner

Induktionsanfang: Es gilt $P(1)$:
$P(1)$ bedeutet
$1 + 0 \cdot x \leq (1+x)^0$, d. h. $1 \leq 1$.
Also gilt $P(1)$.

Induktionsschritt: Es gilt $\forall n \in \mathbb{N} : (P(n) \rightarrow P(n+1))$.

Der Induktionsschritt wird gezeigt durch:

Induktionsannahme: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(n)$.

Induktionsschluss: Es gilt $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= (1+x)^{n-1}(1+x) \\
&\geq (1+(n-1)x)(1+x) \qquad \text{I.A. } P(n) \\
&= 1+(n-1)x+x+(n-1)x^2 \\
&\geq 1+nx . \qquad \text{w.z.b.w.}
\end{aligned}$$

©Dr. Werner Meixner

3.1 Beispiel Induktion

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$ und $m \in \mathbb{N}_0$
die Bernoullische Ungleichung

$$1 + mx \leq (1+x)^m .$$

Geben Sie zunächst ein geeignetes Prädikat $P(n)$ an
und führen Sie den Induktionsbeweis
für beliebiges x unter der Annahme $-1 < x$
nach dem angegebenen Schema durch.

Lösung:

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$.

Wir definieren das Prädikat $P(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ so, dass $P(n)$
genau dann wahr ist, wenn $1 + (n-1)x \leq (1+x)^{n-1}$ gilt, i.Z.

$$P(n) \quad :\Longleftrightarrow \quad 1 + (n-1)x \leq (1+x)^{n-1} .$$

Dann haben wir zu zeigen

$$\forall n \in \mathbb{N} : \, P(n) .$$

Induktionsanfang: Es gilt $P(1)$:
$P(1)$ bedeutet
$1 + 0 \cdot x \leq (1+x)^0$, d. h. $1 \leq 1$.
Also gilt $P(1)$.

Induktionsschritt: Es gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \, (P(n) \to P(n+1))$.

Der Induktionsschritt wird gezeigt durch:

Induktionsannahme: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(n)$.

Induktionsschluss: Es gilt $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= (1+x)^{n-1}(1+x) \\
&\geq (1+(n-1)x)(1+x) \qquad \text{I.A. } P(n) \\
&= 1 + (n-1)x + x + (n-1)x^2 \\
&\geq 1 + nx . \qquad \text{w.z.b.w.}
\end{aligned}$$

4. Vorbereitung

4.1 VA 1

4.1.1 Schrittweiser Beweis

Aufgabe:

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln mit Prädikaten über dem Universum $\mathbb{R}$.

Seien P und Q einstellige Prädikate, für die die folgende Aussage gilt:

$$\exists x \, P(x) \quad \wedge \quad \forall x \, (P(x) \to Q(x))$$

Man zeige:

Dann gilt $\exists x \, Q(x)$.

4. Vorbereitung

4.1 VA 1

4.1.1 Schrittweiser Beweis

Aufgabe:

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln mit Prädikaten über dem Universum $\mathbb{R}$.

Seien P und Q einstellige Prädikate, für die die folgende Aussage gilt:

$$\exists x\, P(x) \quad \wedge \quad \forall x\, (P(x) \to Q(x))$$

Man zeige:

$$\text{Dann gilt } \ \exists x\, Q(x)\,.$$

Lösung:

Wir lösen die Formeln schrittweise auf und fügen anschließend die zu beweisende Aussage zusammen.

Nach Voraussetzung gilt die Aussage $\exists x\, P(x)$.

Deshalb können wir von einem $a \in \mathbb{R}$ mit Eigenschaft $P(a)$ als ein bereits bestimmtes Element ausgehen. Von diesem a ist allerdings nur bekannt, dass $P(a)$ gilt.

Sei also irgendein $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $P(a)$ gegeben.

Da nach Voraussetzung die Aussage $\forall x\, (P(x) \to Q(x))$ ebenfalls gilt, bedeutet dies für das bestimmte a, dass die Aussage

$$P(a) \to Q(a)$$

gilt.

Es gelten also die beiden Aussagen $P(a)$ und $P(a) \to Q(a)$.

Daraus können wir mit Modus ponens folgern, dass gilt

$$Q(a)\,.$$

Da wir nun ein Element a sozusagen konstruiert haben, für das $Q(a)$ gilt, haben wir bewiesen, dass die folgende Aussage gilt:

$$\exists x\, Q(x)\,.$$

W.z.b.w.

4.1.2 Verneinung und DeMorgan

Aufgabe:

Wir nehmen an, dass für ein 3-stelliges Prädikat P die folgende Aussage F gilt:

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, P(x,y,z)\,.$$

Man leite eine pränexe prädikatenlogische Formel her, die äquivalent ist zu

$$\neg F\,.$$

Erklärung:

Bei pränexen Formeln stehen alle Quantoren vorne.

4.1.2 Verneinung und DeMorgan

Aufgabe:

Wir nehmen an, dass für ein 3-stelliges Prädikat P die folgende Aussage F gilt:

$$\forall x\,\exists y\,\forall z\,P(x,y,z)\,.$$

Man leite eine pränexe prädikatenlogische Formel her, die äquivalent ist zu

$$\neg F\,.$$

Erklärung:

Bei pränexen Formeln stehen alle Quantoren vorne.

Lösung:

Wenn *nicht* für alle $x \in \mathbb{R}$
die Eigenschaft $Q(x)$ gilt,
dann ist dies gleichbedeutend damit, dass

für mindestens ein $x \in \mathbb{R}$
die Eigenschaft $Q(x)$ *nicht* gilt.

Für alle Formeln $\forall x\,Q(x)$ gilt also nach DeMorgan

$$\neg\forall x\,Q(x) \;\equiv\; \exists x\,\neg Q(x)\,.$$

Entsprechend gilt

$$\neg\exists x\,Q(x) \;\equiv\; \forall x\,\neg Q(x)\,.$$

Achtung: die Formel $\neg\forall x\,Q(x)$ ist nicht in pränexer Form.

Wir wenden diese Umformungsregel (nach DeMorgan) nun auf $\neg F$ an wie folgt.

$$\begin{aligned}
\neg F &\equiv \neg\forall x\,\exists y\,\forall z\,P(x,y,z)\\
&\equiv \exists x\,\neg\exists y\,\forall z\,P(x,y,z)\\
&\equiv \exists x\,\forall y\,\neg\forall z\,P(x,y,z)\\
&\equiv \exists x\,\forall y\,\exists z\,\neg P(x,y,z)\,.
\end{aligned}$$

4.2 VA 2

4.2.1 Prädikatenlogische Herleitung

Aufgabe:

Seien P und Q 1-stellige Prädikate des Prädikatenkalküls.
Wir betrachten die Menge $\mathcal{A}$, bestehend aus den beiden Formeln

$$\exists x\;P(x) \qquad \text{und} \qquad \forall x\;(P(x) \to Q(x))\,.$$

Man folgere mit dem Herleitungskalkül der Prädikatenlogik die Inferenz

$$\mathcal{A} \vdash \exists x\,Q(x)\,.$$

Rückverweis:
Die Aussage haben wir in VA 1 bereits informell und präzise bewiesen.

4.2 VA 2

4.2.1 Prädikatenlogische Herleitung

Aufgabe:

Seien P und Q 1-stellige Prädikate des Prädikatenkalküls.
Wir betrachten die Menge $\mathcal{A}$, bestehend aus den beiden Formeln

$$\exists x\ P(x) \qquad \text{und} \qquad \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))\,.$$

Man folgere mit dem Herleitungskalkül der Prädikatenlogik die Inferenz

$$\mathcal{A} \vdash \exists x\, Q(x)\,.$$

Rückverweis:
Die Aussage haben wir in VA 1 bereits informell und präzise bewiesen.

Lösung:

Protokoll der Regelanwendungen:

Nr.	Annahmen		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\exists x\ P(x)$	Annahmeregel
2.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$P(a)$	Annahmeregel
3.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$	Annahmeregel
4.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$P(a) \rightarrow Q(a)$	3.+ Allquantorbes.
5.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$Q(a)$	2.+4.+ Impl.bes.
6.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$\exists x\ Q(x)$	5.+ Existenzeinf.
7.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\exists x\ Q(x)$	1.+6.+ Existenzbes.

Diese Herleitung beschreibt exakt die Vorgehensweise bei schrittweisen Existenzbeweisen, die mit dem Ansatz „Sei a ein Element mit der Eigenschaft $P(a)$“ beginnt.

5. Nachtrag VA 5 Blatt 5

Wir verändern die Formel F aus der VA 4 Blatt 5 wie folgt und übernehmen die übrigen Bezeichnungen, insbesondere die Struktur S mit
$S = (U, I)$ mit $U = \{1, 2, 3\}$, $I(a) = a_S = 2$, $I(y) = y_S = 1$ und $I(P) = P_S = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$.

$$G = \forall x\ (P(x, a) \rightarrow \exists y\ P(x, y))\,.$$

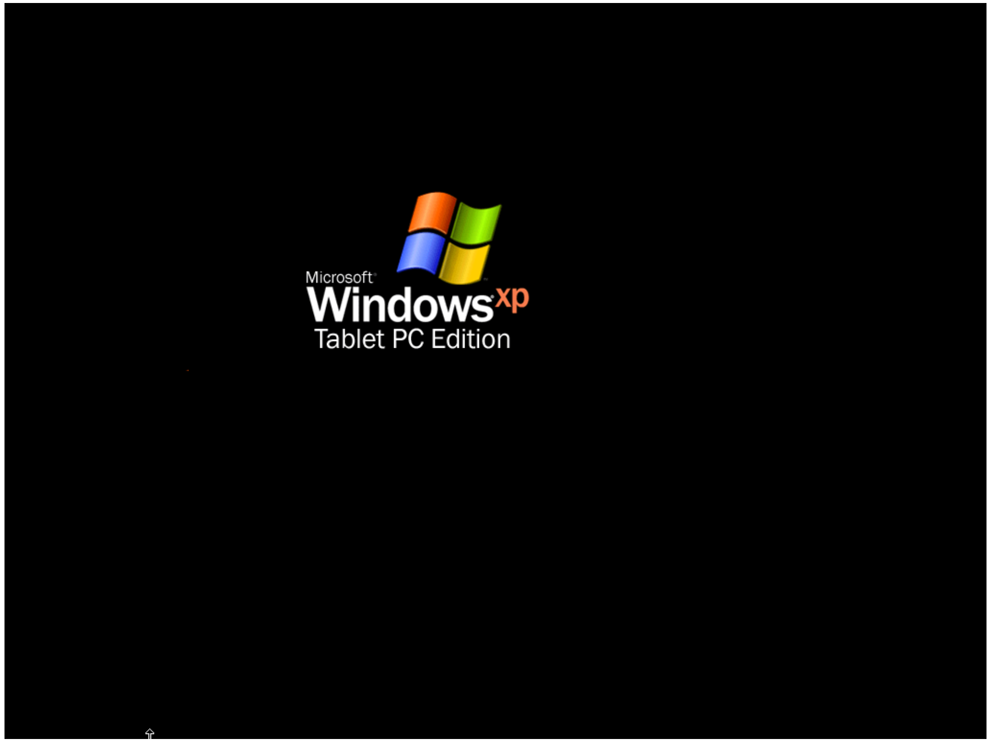
1. Berechnen Sie [G](S) ! Was können Sie daraus für die Erfüllbarkeit der Formel F schließen? Begründung!
2. Ist G eine Tautologie? Begründung!

5. Nachtrag VA 5 Blatt 5

Wir verändern die Formel F aus der VA 4 Blatt 5 wie folgt und übernehmen die übrigen Bezeichnungen, insbesondere die Struktur S mit
$S = (U, I)$ mit $U = \{1, 2, 3\}$, $I(a) = a_S = 2$, $I(y) = y_S = 1$ und $I(P) = P_S = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$.

$$G = \forall x\ (P(x, a) \rightarrow \exists y\ P(x, y))\,.$$

1. Berechnen Sie [G](S) ! Was können Sie daraus für die Erfüllbarkeit der Formel F schließen? Begründung!
2. Ist G eine Tautologie? Begründung!



5. Nachtrag VA 5 Blatt 5

Wir verändern die Formel F aus der VA 4 Blatt 5 wie folgt und übernehmen die übrigen Bezeichnungen, insbesondere die Struktur S mit
$S = (U, I)$ mit $U = \{1, 2, 3\}$, $I(a) = a_S = 2$, $I(y) = y_S = 1$ und $I(P) = P_S = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$.

$$G = \forall x\ (P(x, a) \rightarrow \exists y\ P(x, y))\,.$$

1. Berechnen Sie [G](S) ! Was können Sie daraus für die Erfüllbarkeit der Formel F schließen? Begründung!
2. Ist G eine Tautologie? Begründung!