Script generated by TTT

Title: Meixner: ZUE_DS (22.01.2014)

Date: Wed Jan 22 17:01:02 CET 2014

Duration: 90:51 min

Pages: 24

WS 2013/14

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013WS/ds/uebung/

22. Januar 2014

ZÜ XIII

Übersicht:

1. Übungsbetrieb Fragen, Probleme?
2. Thema Gradfolgen, Bäume
3. Beispiele Prüfer-Code

2. Thema: Gradfolgen, Bäume

Definition

Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ ist ein Baum, falls G zusammenhängend und kreisfrei ist

Die Gradfolge eines einfachen ungerichteten Graphen G mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist definiert als die Folge der in absteigender oder aufsteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade $\mathrm{d}(v_i)$.

2.1 Gradfolgen

Aufgaben

1. Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?

   i) $2, 1, 0$.   ii) $3, 3, 3, 3, 2, 2$.   iii) $3, 3, 3, 2, 2, 2$.

Lösung:

i) Nein, denn wenn einer der drei Knoten den Grad 2 hat, dann ist er mit den beiden anderen Knoten verbunden und es kann keinen isolierten Knoten (Grad 0) geben.

   Außerdem muss die Summe der Grade gerade sein.

ii) Ja. Beispielsweise

$$G = ([6], \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,6\}\}) .$$

iii) Nein, denn die Gradsumme eines Graphen ist immer gerade.

2. Beweisen oder widerlegen Sie:

   i) Zwei isomorphe Graphen haben die gleiche Gradfolge.

   ii) Zwei Graphen, die die gleiche Gradfolge haben, sind isomorph.

Lösung:
Isomorphie bedeutet ,,Gleichheit bis auf Umbezeichnung".

i) Für isomorphe Graphen G_1, G_2 gibt es eine bijektive Zuordnung der Knoten beider Graphen und zwar so, dass die Kantenbeziehungen und damit die Knotengrade erhalten bleiben (Umbezeichnung von Knoten).
   Somit sind auch die Gradfolgen identisch.

ii) Die Umkehrung des vorigen Satzes gilt nicht!

Bemerkung: Wenn diese Umkehrung gelten würde, dann hätte man in dem Vergleich der Gradfolgen ein effizientes Verfahren, die Isomorphie von Graphen zu testen. Dieses Problem ist jedoch, wie man zeigen kann, nicht effizient lösbar.

Wir beweisen unsere Aussage durch Konstruktion eines Gegenbeispiels, indem wir nämlich zwei nicht isomorphe Graphen G_1 und G_2 mit gleicher Gradfolge $3, 2, 2, 1, 1, 1$ angeben.

Die gesuchten Graphen G_1 und G_2 sind jedenfalls **Bäume**!!

Begründung?

Seien

$G_1 = ([6], \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,5\}, \{2,6\}\})$,

$G_2 = ([6], \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,5\}, \{3,6\}\})$.

1. G_1 und G_2 besitzen beide die Gradfolge $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$.

2. G_1 und G_2 sind nicht isomorph:

Beweis von 2.:

In G_1 hängt an dem einzigen Knoten vom Grad 3 ein einziges Blatt.

In G_2 hängen an dem entsprechenden Knoten 2 Blätter

2.2 Bäume

Aufgaben

1. Es gibt keinen Baum ohne Blätter! Wahr oder falsch? Begründung!
2. Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$, für den $|V| > 2$ und für alle $v \in V$ $\deg(v) \neq 2$ gilt, einen Knoten v_0 enthält, der zu mindestens 2 Blättern benachbart ist. Dabei bezeichnet $\deg(v)$ den Grad von v.
   Hinweis: Entfernen Sie die Blätter eines Baumes.
3. Jeder Baum ist bipartit. Beweis!
4. Jeder k-reguläre Graph mit $k \geq 2$ enthält einen Kreis. Beweis!
5. Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Knoten, den man entfernen kann, ohne dass der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. Beweis!

1. Es gibt keinen Baum ohne Blätter! Wahr oder falsch? Begründung!

Lösung:

Falsch!

Ein (einfacher) Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = 1$
ist ein Baum (kreisfrei und zusammenhängend)
mit Knoten $x \in V$ vom Grad 0.
x ist aber kein Blatt,
weil dann $\deg(x) = 1$ gelten müsste.

Ein noch einfacheres Gegenbeipiel ist der leere Baum.

Bemerkung: Ebenso wichtig ist aber die Beobachtung, dass abgesehen von obigen Beispielen alle Bäume Blätter besitzen.
Es ist sogar so, dass jeder Knoten auf einem Pfad liegt mit Blättern als Endpunkte.

2. Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$, für den $|V| > 2$ und für alle $v \in V$ $\deg(v) \neq 2$ gilt, einen Knoten v_0 enthält, der zu mindestens 2 Blättern benachbart ist.
Dabei bezeichnet $\deg(v)$ den Grad von v.

Hinweis: Entfernen Sie die Blätter eines Baumes.

Beobachtung: Bäume, die nur aus Blättern bestehen,
also keine innere Knoten enthalten,
besitzen genau 2 Knoten und brauchen wegen $|V| > 2$ nicht betrachtet zu werden.

Lösung:

Es gilt, dass alle Knoten v von T einen Grad ungleich 0 besitzen.

Daraus folgt, dass T einen inneren Knoten v_i
(d. h. einen Knoten v_i, der kein Blatt ist)
besitzt, der mindestens den Grad 3 hat.

Durch Entfernen der Blätter von T
konstruieren wir nun den Baum T'.

T' ist nicht leer, weil $v_i \in T'$ gilt.

Falls T' nur einen einzigen Knoten besitzt,
dann muss dieser Knoten in T mindestens den Grad 3 haben,
also mindestens 3 Blätter tragen,
womit in diesem Fall der Beweis erbracht ist.

Anderfalls aber gibt es in T' mindestens ein Blatt.

Wählen wir nun in T' ein beliebiges Blatt v_0 aus,
dann ist v_0 in T ein innerer Knoten mit Grad ungleich 0 oder 1
und hat wegen $\deg(v) \neq 2$ den Grad $\deg(v_0) \geq 3$.

Da v_0 in T' ein Blatt ist (also in T' den Grad 1 hat), muss es zwei Blätter u_1, u_2 in T geben, die zu v_0 benachbart sind.

3. Jeder Baum ist bipartit. Beweis!

Bemerkung:

Für bipartite Graphen $G = (V, E)$ haben wir in der Vorlesung eine Zerlegung eingeführt. Danach schreiben wir

$G = (A, B, E)$, wobei $A \cup B = V$ und $A \cap B = \emptyset$ gilt

und weder innerhalb A noch innerhalb B Kanten aus E verlaufen können.

Alle Kanten verbinden stets Elemente aus A mit Elementen aus B.

Lösung:

Wir bauen, ausgehend von einem Baum $G = (V, E)$, induktiv zwei derartige Knotenmengen A und B auf, so dass alle Kanten nicht innerhalb von A und nicht innerhalb von B verlaufen.

Start:

Wir wählen einen beliebigen Startknoten s

und setzen $\{s\} = A$, sowie $B = \emptyset$.

Alle Nachfolger von s werden in die Menge B aufgenommen.

Der damit konstruierbare induzierte Teilgraph ist offenbar bipartit, weil im Baum die Nachbarn von s wegen Kreisfreiheit nicht mit Kanten verbunden sein können.

Lösung:

Wir bauen, ausgehend von einem Baum $G = (V, E)$, induktiv zwei derartige Knotenmengen A und B auf, so dass alle Kanten nicht innerhalb von A und nicht innerhalb von B verlaufen.

Start:

Wir wählen einen beliebigen Startknoten s

und setzen $\{s\} = A$, sowie $B = \emptyset$.

Alle Nachfolger von s werden in die Menge B aufgenommen.

Der damit konstruierbare induzierte Teilgraph ist offenbar bipartit, weil im Baum die Nachbarn von s wegen Kreisfreiheit nicht mit Kanten verbunden sein können.

Wiederholungsschritt:

Falls es einen Knoten $x \in B$ gibt, der einen Nachbarn hat, der noch nicht in $A \cup B$ enthalten ist, wird x ausgewählt und sämtliche Nachbarn von x werden in A aufgenommen.

Der damit konstruierte induzierte Teilgraph ist wiederum bipartit.

Der Wiederholungsschritt wird mit jeweils vertauschten Rollen von A und B wiederholt bis alle Knoten entweder in A oder in B enthalten sind.

4. Jeder k-reguläre Graph mit $k \geq 2$ enthält einen Kreis. Beweis!

Lösung:

Widerspruchsbeweis:

Ein kreisfreier Graph ist ein Wald,

d. h. ein Baum oder

eine disjunkte und nicht zusammenhängende Summe von Bäumen.

Jeder nichtleere Baum enthält einen Knoten vom Grad 0 oder 1.

Der Graph kann also nicht k-regulär sein für $k \geq 2$,
denn das würde $k = 0$ und $k = 1$ ausschließen.

5. Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Knoten, den man entfernen kann, ohne dass der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. Beweis!

Lösung:

Da G zusammenhängend ist, gibt es nach Vorlesung einen zugehörigen Spannbaum.

Wir behaupten,
dass nach Entfernung eines Blattes w eines solchen Baums (einschließlich seiner in G inzidenten Kanten) der resultierende Teilgraph zusammenhängend ist.

3. Prüfer-Code

1. Gegeben seien die Bäume
$B_1 =$
$([9], \{\{1,9\},\{2,9\},\{4,7\},\{5,6\},\{8,3\},\{6,7\},\{7,9\},\{3,9\}\})$,
$B_2 =$
$([9], \{\{2,1\},\{1,7\},\{5,3\},\{4,1\},\{7,3\},\{9,3\},\{6,4\},\{8,4\}\})$.
Bestimmen Sie zu B_1 und B_2 jeweils den Prüfer-Code.

Lösung:

Den Prüfer-Code von Bäumen B_1, B_2 erhält man, indem man,

ausgehend von einer lückenlosen und eindeutigen Knotennummerierung von 1 ab,

stets das Blatt mit der kleinsten Knotennummer bestimmt und denjenigen Knoten notiert, an dem das Blatt hängt.

Anschließend wird das Blatt aus dem Baum gestrichen und der Schritt so lange wiederholt bis nur noch 2 Knoten übrig sind.

Für B_1 erhalten wir den Prüfer-Code $(9, 9, 7, 6, 7, 9, 3)$.
Für B_2 erhalten wir den Prüfer-Code $(1, 3, 4, 4, 1, 7, 3)$.

2. Bestimmen Sie zu den folgenden Prüfer-Codes die zugehörigen Bäume.

   i) $(6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)$,

   ii) $(1, 1, 1, 2, 1, 2, 1)$,

   iii) $(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.