Script **generated by TTT**

Title: Seidl: Theoretische_Informatik (25.04.2013)

Date: Thu Apr 25 16:02:03 CEST 2013

Duration: 87:55 min

Pages: 87

Satz 2.17 (Kleene 1956)

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann durch einen regulären Ausdruck darstellbar, wenn sie regulär ist.

Satz 2.17 (Kleene 1956)

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann durch einen regulären Ausdruck darstellbar, wenn sie regulär ist.

Beweis:

"$\Longrightarrow$":

Sei $L = L(\gamma)$.

Wir konstruieren einen ϵ-NFA N mit $L = L(N)$ mit Hilfe struktureller Induktion über γ.

Satz 2.17 (Kleene 1956)

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann durch einen regulären Ausdruck darstellbar, wenn sie regulär ist.

Beweis:

"$\Longrightarrow$":

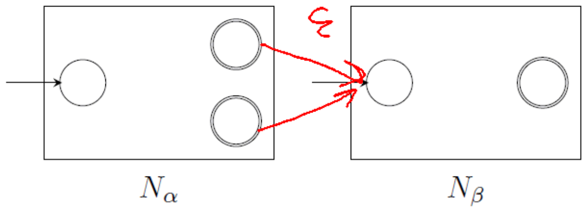
Sei $L = L(\gamma)$.

Wir konstruieren einen ϵ-NFA N mit $L = L(N)$ mit Hilfe struktureller Induktion über γ.

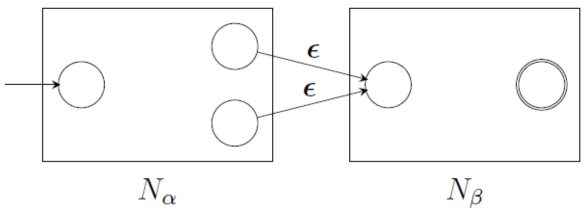
Die Basisfälle $\gamma = \emptyset$, $\gamma = \epsilon$, und $\gamma = a \in \Sigma$ sind offensichtlich.

Fall $\gamma = \alpha\beta$:
Nach Induktionsannahme können wir ϵ-NFAs N_α und N_β konstruieren mit $L(N_\alpha) = L(\alpha)$ und $L(N_\beta) = L(\beta)$.

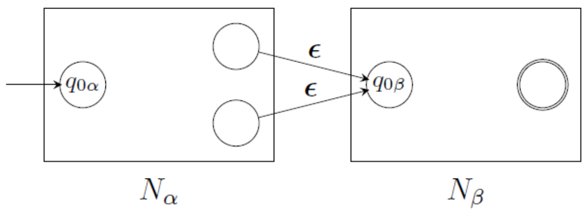
Fall $\gamma = \alpha\beta$:
Nach Induktionsannahme können wir ϵ-NFAs N_α und N_β konstruieren mit $L(N_\alpha) = L(\alpha)$ und $L(N_\beta) = L(\beta)$.



Fall $\gamma = \alpha\beta$:
Nach Induktionsannahme können wir ϵ-NFAs N_α und N_β konstruieren mit $L(N_\alpha) = L(\alpha)$ und $L(N_\beta) = L(\beta)$.



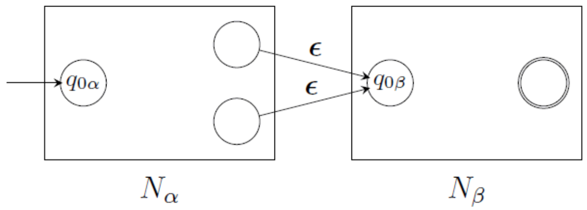
Fall $\gamma = \alpha\beta$:
Nach Induktionsannahme können wir ϵ-NFAs N_α und N_β konstruieren mit $L(N_\alpha) = L(\alpha)$ und $L(N_\beta) = L(\beta)$.



Formal:

$$\begin{aligned} N_\alpha &= (Q_\alpha, \Sigma, \delta_\alpha, q_{0\alpha}, F_\alpha) \\ N_\beta &= (Q_\beta, \Sigma, \delta_\beta, q_{0\beta}, F_\beta) \end{aligned}$$

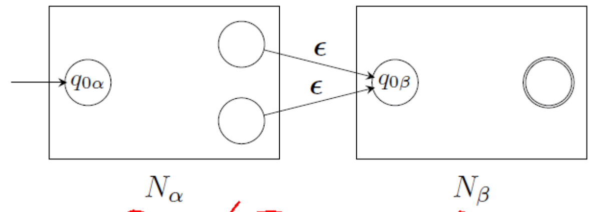
Fall $\gamma = \alpha\beta$:
Nach Induktionsannahme können wir ϵ-NFAs N_α und N_β konstruieren mit $L(N_\alpha) = L(\alpha)$ und $L(N_\beta) = L(\beta)$.



Formal:

$$
\begin{aligned}
N_\alpha &= (Q_\alpha, \Sigma, \delta_\alpha, q_{0\alpha}, F_\alpha) \\
N_\beta &= (Q_\beta, \Sigma, \delta_\beta, q_{0\beta}, F_\beta) \qquad \text{(mit } Q_\alpha \cap Q_\beta = \emptyset) \\
N_{\alpha\beta} &:= (Q_\alpha \cup Q_\beta, \Sigma, \delta, q_{0\alpha}, F_\beta)
\end{aligned}
$$

Fall $\gamma = \alpha\beta$:
Nach Induktionsannahme können wir ϵ-NFAs N_α und N_β konstruieren mit $L(N_\alpha) = L(\alpha)$ und $L(N_\beta) = L(\beta)$.



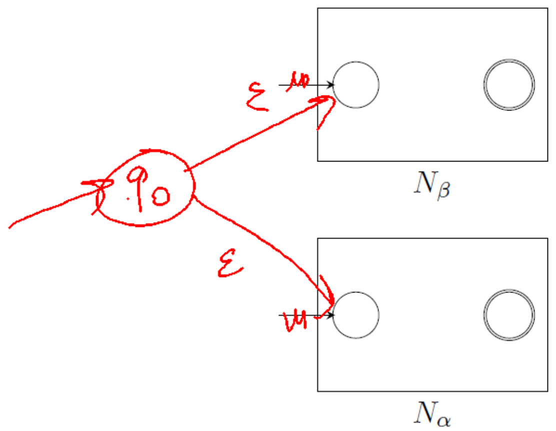
Formal:

$\delta : (Q_\alpha \cup Q_\beta) \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to Q_\alpha \cup Q_\beta$

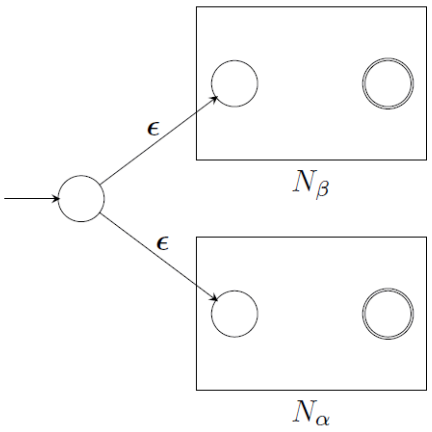
$$
\begin{aligned}
N_\alpha &= (Q_\alpha, \Sigma, \delta_\alpha, q_{0\alpha}, F_\alpha) \\
N_\beta &= (Q_\beta, \Sigma, \delta_\beta, q_{0\beta}, F_\beta) \qquad \text{(mit } Q_\alpha \cap Q_\beta = \emptyset) \\
N_{\alpha\beta} &:= (Q_\alpha \cup Q_\beta, \Sigma, \delta, q_{0\alpha}, F_\beta) \\
\delta &:= \delta_\alpha \cup \delta_\beta \cup \{(f, \epsilon) \mapsto \{q_{0\beta}\} \mid f \in F_\alpha\}
\end{aligned}
$$

Fall $\gamma = \alpha \mid \beta$:
Nach Induktionsannahme können wir ϵ-NFAs N_α und N_β konstruieren mit $L(N_\alpha) = L(\alpha)$ und $L(N_\beta) = L(\beta)$.

Fall $\gamma = \alpha \mid \beta$:
Nach Induktionsannahme können wir ϵ-NFAs N_α und N_β konstruieren mit $L(N_\alpha) = L(\alpha)$ und $L(N_\beta) = L(\beta)$.



Fall $\gamma = \alpha \mid \beta$:
Nach Induktionsannahme können wir ϵ-NFAs N_α und N_β konstruieren mit $L(N_\alpha) = L(\alpha)$ und $L(N_\beta) = L(\beta)$.

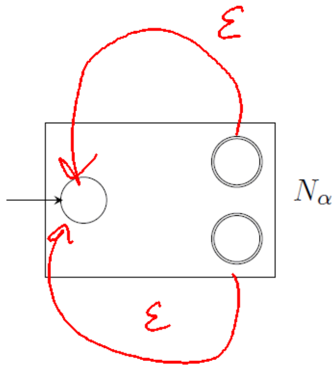


Fall $\gamma = \alpha^*$:
Nach Induktionsannahme können wir einen ϵ-NFA N_α konstruieren mit

$$L(N_\alpha) = L(\alpha) \; .$$

Fall $\gamma = \alpha^*$:
Nach Induktionsannahme können wir einen ϵ-NFA N_α konstruieren mit

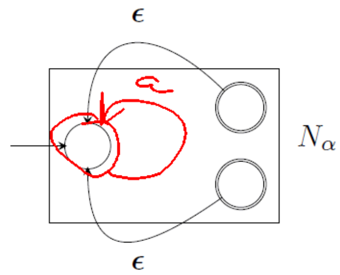
$$L(N_\alpha) = L(\alpha) \; .$$



Fall $\gamma = \alpha^*$:
Nach Induktionsannahme können wir einen ϵ-NFA N_α konstruieren mit

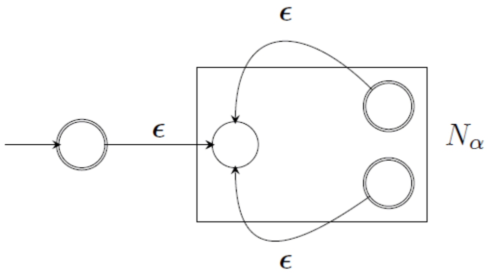
$$L(N_\alpha) = L(\alpha) \; .$$

α^*



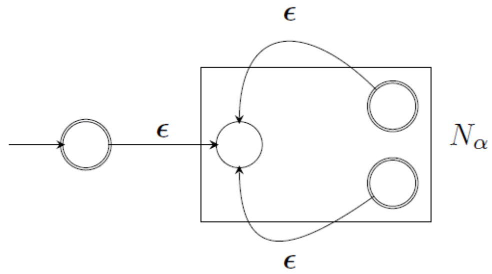
Fall $\gamma = \alpha^*$:
Nach Induktionsannahme können wir einen ϵ-NFA N_α konstruieren mit

$$L(N_\alpha) = L(\alpha) \; .$$



Fall $\gamma = \alpha^*$:
Nach Induktionsannahme können wir einen ϵ-NFA N_α konstruieren mit

$$L(N_\alpha) = L(\alpha) \; .$$



"$\Longleftarrow$":
Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ ein DFA.
Wir konstruieren einen RE γ mit $L(M) = L(\gamma)$.

"$\Longleftarrow$":
Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ ein DFA.
Wir konstruieren einen RE γ mit $L(M) = L(\gamma)$.

Sei $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$.

"$\Longleftarrow$":
Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ ein DFA.
Wir konstruieren einen RE γ mit $L(M) = L(\gamma)$.

Sei $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$. Wir setzen

$R_{ij}^k := \{w \in \Sigma^* \mid$ die Eingabe w führt von q_i in q_j,

"$\Longleftarrow$":
Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ ein DFA.
Wir konstruieren einen RE γ mit $L(M) = L(\gamma)$.

Sei $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$. Wir setzen

$R_{ij}^k := \{w \in \Sigma^* \mid$ die Eingabe w führt von q_i in q_j, wobei alle Zwischenzustände (ohne ersten und letzten) einen Index $\leq k$ haben $\}$

"$\Longleftarrow$":
Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ ein DFA.
Wir konstruieren einen RE γ mit $L(M) = L(\gamma)$.

Sei $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$. Wir setzen

$R_{ij}^k := \{w \in \Sigma^* \mid$ die Eingabe w führt von q_i in q_j, wobei alle Zwischenzustände (ohne ersten und letzten) einen Index $\leq k$ haben $\}$

Behauptung: Für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$ können wir einen RE α_{ij}^k konstruieren mit $L(\alpha_{ij}^k) = R_{ij}^k$.

Bew.:

Induktion über k:
$k = 0$: Hier gilt

$$R_{ij}^0 = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}, & \text{falls } i \neq j \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\epsilon\}, & \text{falls } i = j \end{cases}$$

Bew.:

Induktion über k:
$k = 0$: Hier gilt

$$R_{ij}^0 = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}, & \text{falls } i \neq j \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\epsilon\}, & \text{falls } i = j \end{cases}$$

Setze

$$\alpha_{ij}^0 := \begin{cases} a_1 | \dots | a_l & \text{falls } i \neq j \\ a_1 | \dots | a_l | \epsilon & \text{falls } i = j \end{cases}$$

wobei $\{a_1 \dots, a_l\} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}$.

Bew.:

Induktion über k:
$k \Rightarrow k+1$: Hier gilt

$$R_{ij}^{k+1} = R_{ij}^k \cup R_{i(k+1)}^k (R_{(k+1)(k+1)}^k)^* R_{(k+1)j}^k$$

Bew.:

Induktion über k:
$k \Rightarrow k+1$: Hier gilt

$$R_{ij}^{k+1} = R_{ij}^k \cup R_{i(k+1)}^k (R_{(k+1)(k+1)}^k)^* R_{(k+1)j}^k$$

weil man jede Folge von Zahlen $\leq k+1$ schreiben kann als

$$F_1, k+1, F_2, k+1, \dots, k+1, F_m$$

wobei jede F_l Folge von Zahlen $\leq k$ ist.

Bew.:

Induktion über k:
$k \Rightarrow k+1$: Hier gilt

$$R_{ij}^{k+1} = R_{ij}^k \cup R_{i(k+1)}^k (R_{(k+1)(k+1)}^k)^* R_{(k+1)j}^k$$

weil man jede Folge von Zahlen $\leq k+1$ schreiben kann als

$$F_1, k+1, F_2, k+1, \dots, k+1, F_m$$

wobei jede F_l Folge von Zahlen $\leq k$ ist.
Wir definieren rekursiv

$$\alpha_{ij}^{k+1} = \alpha_{ij}^k \mid \alpha_{i(k+1)}^k (\alpha_{(k+1)(k+1)}^k)^* \alpha_{(k+1)j}^k$$

Bew.:

Induktion über k:
$k \Rightarrow k+1$: Hier gilt

$$R_{ij}^{k+1} = R_{ij}^{k} \cup R_{i(k+1)}^{k}(R_{(k+1)(k+1)}^{k})^* R_{(k+1)j}^{k}$$

weil man jede Folge von Zahlen $\leq k+1$ schreiben kann als

$$F_1, k+1, F_2, k+1, \dots, k+1, F_m$$

wobei jede F_l Folge von Zahlen $\leq k$ ist.
Wir definieren rekursiv

$$\alpha_{ij}^{k+1} = \alpha_{ij}^{k} \mid \alpha_{i(k+1)}^{k}(\alpha_{(k+1)(k+1)}^{k})^* \alpha_{(k+1)j}^{k}$$

Somit gilt

$$L(M) = L(\alpha_{1i_1}^{n} \mid \cdots \mid \alpha_{1i_r}^{n})$$

wobei $F = \{\overset{q}{i_1}, \dots, \overset{q}{i_r}\}$. □

Bew.:

Induktion über k:
$k \Rightarrow k+1$: Hier gilt

$$R_{ij}^{k+1} = R_{ij}^{k} \cup R_{i(k+1)}^{k}(R_{(k+1)(k+1)}^{k})^* R_{(k+1)j}^{k}$$

weil man jede Folge von Zahlen $\leq k+1$ schreiben kann als

$$F_1, k+1, F_2, k+1, \dots, k+1, F_m$$

wobei jede F_l Folge von Zahlen $\leq k$ ist.
Wir definieren rekursiv

$$\alpha_{ij}^{k+1} = \alpha_{ij}^{k} \mid \alpha_{i(k+1)}^{k}(\alpha_{(k+1)(k+1)}^{k})^* \alpha_{(k+1)j}^{k}$$

Somit gilt

$$L(M) = L(\alpha_{1i_1}^{n} \mid \cdots \mid \alpha_{1i_r}^{n})$$

wobei $F = \{i_1, \dots, i_r\}$. □

Fakt 2.18
Alle endlichen Sprachen sind regulär.

$$\{w_1, \dots, w_r\} = L(w_1 \mid \dots \mid w_r)$$

Unsere Konversionen auf einen Blick:

DFA NFA ϵ-NFA

RE

Unsere Konversionen auf einen Blick:

$$\begin{array}{ccccc} \text{DFA} & & \text{NFA} & & \epsilon\text{-NFA} \\ & & & \nearrow & \\ & & \text{RE} & & \end{array}$$

RE $\to$ ϵ-NFA:	RE der Länge $n \rightsquigarrow O(n)$ Zustände

Unsere Konversionen auf einen Blick:

$$\begin{array}{ccccc} \text{DFA} & \leftarrow & \text{NFA} & \leftarrow & \epsilon\text{-NFA} \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & \text{RE} & & \end{array}$$

RE $\to$ ϵ-NFA:	RE der Länge $n \rightsquigarrow O(n)$ Zustände
ϵ-NFA $\to$ NFA:	$Q \rightsquigarrow Q$
NFA $\to$ DFA:	n Zustände $\rightsquigarrow O(2^n)$ Zustände
FA $\to$ RE:	n Zustände $\rightsquigarrow$ RE der Länge $O(n4^n)$

Unsere Konversionen auf einen Blick:

$$\begin{array}{ccccc} \text{DFA} & \leftarrow & \text{NFA} & \leftarrow & \epsilon\text{-NFA} \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & \text{RE} & & \end{array}$$

RE $\to$ ϵ-NFA:	RE der Länge $n \rightsquigarrow O(n)$ Zustände
ϵ-NFA $\to$ NFA:	$Q \rightsquigarrow Q$
NFA $\to$ DFA:	n Zustände $\rightsquigarrow O(2^n)$ Zustände
FA $\to$ RE:	n Zustände $\rightsquigarrow$ RE der Länge $O(n4^n)$

Beweis FA$\to$RE: $m_k :=$ maximale Länge von α_{ij}^k

Unsere Konversionen auf einen Blick:

$$\begin{array}{ccccc} \text{DFA} & \leftarrow & \text{NFA} & \leftarrow & \epsilon\text{-NFA} \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & \text{RE} & & \end{array}$$

RE $\to$ ϵ-NFA:	RE der Länge $n \rightsquigarrow O(n)$ Zustände
ϵ-NFA $\to$ NFA:	$Q \rightsquigarrow Q$
NFA $\to$ DFA:	n Zustände $\rightsquigarrow O(2^n)$ Zustände
FA $\to$ RE:	n Zustände $\rightsquigarrow$ RE der Länge $O(n4^n)$

Beweis FA$\to$RE: $m_k :=$ maximale Länge von α_{ij}^k

- $m_0 = c_1|\Sigma|$

Unsere Konversionen auf einen Blick:

$$\begin{array}{ccccc} \text{DFA} & \leftarrow & \text{NFA} & \leftarrow & \epsilon\text{-NFA} \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & \text{RE} & & \end{array}$$

RE $\rightarrow$ ϵ-NFA:	RE der Länge $n \rightsquigarrow O(n)$ Zustände
ϵ-NFA $\rightarrow$ NFA:	$Q \rightsquigarrow Q$
NFA $\rightarrow$ DFA:	n Zustände $\rightsquigarrow O(2^n)$ Zustände
FA $\rightarrow$ RE:	n Zustände $\rightsquigarrow$ RE der Länge $O(n4^n)$

Beweis FA$\rightarrow$RE: $m_k :=$ maximale Länge von α_{ij}^k

- $m_0 = c_1|\Sigma|$
- $m_{k+1} = 4 * m_k + c_2$

Unsere Konversionen auf einen Blick:

$$\begin{array}{ccccc} \text{DFA} & & \text{NFA} & & \epsilon\text{-NFA} \\ & & & & \\ & & \text{RE} & & \end{array}$$

Unsere Konversionen auf einen Blick:

$$\begin{array}{ccccc} \text{DFA} & \leftarrow & \text{NFA} & \leftarrow & \epsilon\text{-NFA} \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & \text{RE} & & \end{array}$$

RE $\rightarrow$ ϵ-NFA:	RE der Länge $n \rightsquigarrow O(n)$ Zustände
ϵ-NFA $\rightarrow$ NFA:	$Q \rightsquigarrow Q$
NFA $\rightarrow$ DFA:	n Zustände $\rightsquigarrow O(2^n)$ Zustände
FA $\rightarrow$ RE:	n Zustände $\rightsquigarrow$ RE der Länge $O(n4^n)$

Beweis FA$\rightarrow$RE: $m_k :=$ maximale Länge von α_{ij}^k

- $m_0 = c_1|\Sigma|$
- $m_{k+1} = 4 * m_k + c_2$
- $m_k \in O(4^k)$

Unsere Konversionen auf einen Blick:

$$\begin{array}{ccccc} \text{DFA} & \leftarrow & \text{NFA} & \leftarrow & \epsilon\text{-NFA} \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & \text{RE} & & \end{array}$$

RE $\rightarrow$ ϵ-NFA:	RE der Länge $n \rightsquigarrow O(n)$ Zustände
ϵ-NFA $\rightarrow$ NFA:	$Q \rightsquigarrow Q$
NFA $\rightarrow$ DFA:	n Zustände $\rightsquigarrow O(2^n)$ Zustände
FA $\rightarrow$ RE:	n Zustände $\rightsquigarrow$ RE der Länge $O(n4^n)$

Beweis FA$\rightarrow$RE: $m_k :=$ maximale Länge von α_{ij}^k

- $m_0 = c_1|\Sigma|$
- $m_{k+1} = 4 * m_k + c_2$
- $m_k \in O(4^k)$
- Länge des Gesamtausdrucks: $O(n4^n)$

Unsere Konversionen auf einen Blick:

$$\begin{array}{ccccc} \text{DFA} & \leftarrow & \text{NFA} & \leftarrow & \epsilon\text{-NFA} \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & \text{RE} & & \end{array}$$

RE $\to$ ϵ-NFA:	RE der Länge $n \rightsquigarrow O(n)$ Zustände
ϵ-NFA $\to$ NFA:	$Q \rightsquigarrow Q$
NFA $\to$ DFA:	n Zustände $\rightsquigarrow O(2^n)$ Zustände
FA $\to$ RE:	n Zustände $\rightsquigarrow$ RE der Länge $O(n4^n)$

Beweis FA$\to$RE: $m_k :=$ maximale Länge von α_{ij}^k

- $m_0 = c_1|\Sigma|$
- $m_{k+1} = 4 * m_k + c_2$
- $m_k \in O(4^k)$
- Länge des Gesamtausdrucks: $O(n4^n)$

2.6 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 2.19
Seien $R, R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2,$$

reguläre Sprachen.

2.6 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 2.19
Seien $R, R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2, \; R_1 \cup R_2, \; R^*,$$

reguläre Sprachen.

$\alpha_1 \mid \alpha_2$ $\qquad$ α^*

2.6 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 2.19
Seien $R, R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2, \; R_1 \cup R_2, \; R^*, \; \overline{R} \; (:= \Sigma^* \setminus R),$$

reguläre Sprachen.

2.6 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 2.19

Seien $R, R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2,\ R_1 \cup R_2,\ R^*,\ \overline{R}\ (:= \Sigma^* \setminus R),\ R_1 \cap R_2,\ R_1 \setminus R_2$$

reguläre Sprachen.

2.6 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 2.19

Seien $R, R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2,\ R_1 \cup R_2,\ R^*,\ \overline{R}\ (:= \Sigma^* \setminus R),\ R_1 \cap R_2,\ R_1 \setminus R_2$$

reguläre Sprachen.

Beweis:

$R_1R_2,\ R_1 \cup R_2,\ R^*$ klar.

2.6 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 2.19

Seien $R, R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2,\ R_1 \cup R_2,\ R^*,\ \overline{R}\ (:= \Sigma^* \setminus R),\ R_1 \cap R_2,\ R_1 \setminus R_2$$

reguläre Sprachen.

Beweis:

$R_1R_2,\ R_1 \cup R_2,\ R^*$ klar.

$\overline{R}$ Sei $R = L(A),\ A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA.

2.6 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 2.19

Seien $R, R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2,\ R_1 \cup R_2,\ R^*,\ \overline{R}\ (:= \Sigma^* \setminus R),\ R_1 \cap R_2,\ R_1 \setminus R_2$$

reguläre Sprachen.

Beweis:

$R_1R_2,\ R_1 \cup R_2,\ R^*$ klar.

$\overline{R}$ Sei $R = L(A),\ A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA.

Betrachte $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$.

2.6 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 2.19
Seien $R, R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2,\ \ R_1 \cup R_2,\ \ R^*,\ \ \overline{R}\ (:= \Sigma^* \setminus R),\ \ R_1 \cap R_2,\ \ R_1 \setminus R_2$$

reguläre Sprachen.

Beweis:
R_1R_2, $R_1 \cup R_2$, R^* klar.

$\overline{R}$ Sei $R = L(A)$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA.
Betrachte $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$.
Dann ist $L(A') = \overline{L(A)} = \overline{R}$

$R_1 \cap R_2 \quad = \overline{\overline{R_1} \cup \overline{R_2}}$ (De Morgan)

2.6 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 2.19
Seien $R, R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2,\ \ R_1 \cup R_2,\ \ R^*,\ \ \overline{R}\ (:= \Sigma^* \setminus R),\ \ R_1 \cap R_2,\ \ R_1 \setminus R_2$$

reguläre Sprachen.

Beweis:
R_1R_2, $R_1 \cup R_2$, R^* klar.

$\overline{R}$ Sei $R = L(A)$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA.
Betrachte $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$.
Dann ist $L(A') = \overline{L(A)} = \overline{R}$

$R_1 \cap R_2 \quad = \overline{\overline{R_1} \cup \overline{R_2}}$ (De Morgan)

$R_1 \setminus R_2 \quad =$

2.6 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 2.19
Seien $R, R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2,\ \ R_1 \cup R_2,\ \ R^*,\ \ \overline{R}\ (:= \Sigma^* \setminus R),\ \ R_1 \cap R_2,\ \ R_1 \setminus R_2$$

reguläre Sprachen.

Beweis:
R_1R_2, $R_1 \cup R_2$, R^* klar.

$\overline{R}$ Sei $R = L(A)$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA.
Betrachte $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$.
Dann ist $L(A') = \overline{L(A)} = \overline{R}$

$R_1 \cap R_2 \quad = \overline{\overline{R_1} \cup \overline{R_2}}$ (De Morgan)

$R_1 \setminus R_2 \quad = R_1 \cap \overline{R_2}$ $\square$

Bemerkung
Komplementierung ($\overline{R}$) durch Vertauschen von Endzuständen und Nicht-Endzuständen funktioniert nur bei DFAs, nicht bei NFAs!

Bemerkung
Komplementierung ($\overline{R}$) durch Vertauschen von Endzuständen und Nicht-Endzuständen funktioniert nur bei DFAs, nicht bei NFAs!

Übungsaufgabe: Finde Gegenbeispiel für NFAs

Bei NFAs:

Komplementierung erzwingt Determinierung.

Die Produkt-Konstruktion:
Durchschnitt direkt auf DFAs, ohne Umweg über de Morgan.

Die Produkt-Konstruktion:
Durchschnitt direkt auf DFAs, ohne Umweg über de Morgan.

Beide DFAs laufen synchron parallel, Wort wird akzeptiert wenn *beide* akzeptieren.

Die Produkt-Konstruktion:
Durchschnitt direkt auf DFAs, ohne Umweg über de Morgan.

Beide DFAs laufen synchron parallel, Wort wird akzeptiert wenn *beide* akzeptieren.

Parallelismus = Kreuzprodukt der Zustandsräume

Die Produkt-Konstruktion:
Durchschnitt direkt auf DFAs, ohne Umweg über de Morgan.

Beide DFAs laufen synchron parallel, Wort wird akzeptiert wenn *beide* akzeptieren.

Parallelismus = Kreuzprodukt der Zustandsräume

Satz 2.20

Sind $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_i)$ *und* $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ *DFAs, dann ist der Produkt-Automat*

$$M := (Q_1 \times Q_2,$$

Die Produkt-Konstruktion:
Durchschnitt direkt auf DFAs, ohne Umweg über de Morgan.

Beide DFAs laufen synchron parallel, Wort wird akzeptiert wenn *beide* akzeptieren.

Parallelismus = Kreuzprodukt der Zustandsräume

Satz 2.20

Sind $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_i)$ *und* $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ *DFAs, dann ist der Produkt-Automat*

$$M := (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (s_1, s_2), F_1 \times F_2)$$

Die Produkt-Konstruktion:
Durchschnitt direkt auf DFAs, ohne Umweg über de Morgan.

Beide DFAs laufen synchron parallel, Wort wird akzeptiert wenn *beide* akzeptieren.

Parallelismus = Kreuzprodukt der Zustandsräume

Satz 2.20

Sind $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_i)$ *und* $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ *DFAs, dann ist der Produkt-Automat*

$$M := (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (s_1, s_2), F_1 \times F_2)$$

$$\delta((q_1, q_2), a) := (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$$

Die Produkt-Konstruktion:
Durchschnitt direkt auf DFAs, ohne Umweg über de Morgan.

Beide DFAs laufen synchron parallel, Wort wird akzeptiert wenn *beide* akzeptieren.

Parallelismus = Kreuzprodukt der Zustandsräume

Satz 2.20

Sind $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_i)$ *und* $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ *DFAs, dann ist der Produkt-Automat*

$$M := (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (s_1, s_2), F_1 \times F_2)$$

$$\delta((q_1, q_2), a) := (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$$

ein DFA der $L(M_1) \cap L(M_2)$ *akzeptiert.*

Die Produkt-Konstruktion:
Durchschnitt direkt auf DFAs, ohne Umweg über de Morgan.

Beide DFAs laufen synchron parallel, Wort wird akzeptiert wenn *beide* akzeptieren.

Parallelismus = Kreuzprodukt der Zustandsräume

Satz 2.20

Sind $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_i)$ *und* $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ *DFAs, dann ist der Produkt-Automat*

$$M := (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (s_1, s_2), F_1 \times F_2)$$
$$\delta((q_1, q_2), a) := (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$$

ein DFA der $L(M_1) \cap L(M_2)$ *akzeptiert.*

Erinnerung: $|Q_1 \times Q_2| = |Q_1||Q_2|$

Beweis:

Mit Induktion über w:

$$\hat{\delta}((q_1, q_2), w) = (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)).$$

Beweis:

Mit Induktion über w:

$$\hat{\delta}((q_1, q_2), w) = (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)).$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} & w \in L(M) \\ \Leftrightarrow\ & (\hat{\delta}((s_1, s_2), w) \in F_1 \times F_2 \\ \Leftrightarrow\ & (\hat{\delta}_1(s_1, w), \hat{\delta}_2(s_2, w)) \in F_1 \times F_2 \\ \Leftrightarrow\ & \hat{\delta}_1(s_1, w) \in F_1 \wedge \hat{\delta}_2(s_2, w) \in F_2 \\ \Leftrightarrow\ & w \in L(M_1) \wedge w \in L(M_2) \qquad Q \cup Q_1 \times F_2) \\ \Leftrightarrow\ & w \in L(M_1) \cap L(M_2) \end{aligned}$$

$\cup$

$\square$

Definition 2.21

Die Umkehrung (Spiegelung) von $w = a_1 \dots a_n$ ist $w^R := a_n \dots a_1$.
Die Umkehrung einer Sprache A ist $A^R := \{w^R \mid w \in A\}$

Definition 2.21

Die Umkehrung (Spiegelung) von $w = a_1 \dots a_n$ ist $w^R := a_n \dots a_1$.
Die Umkehrung einer Sprache A ist $A^R := \{w^R \mid w \in A\}$

Satz 2.22

Ist A eine reguläre Sprache, dann auch A^R.

Definition 2.21

Die Umkehrung (Spiegelung) von $w = a_1 \dots a_n$ ist $w^R := a_n \dots a_1$.
Die Umkehrung einer Sprache A ist $A^R := \{w^R \mid w \in A\}$

Satz 2.22

Ist A eine reguläre Sprache, dann auch A^R.

Beweis:

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit $L(M) = A$.

Definition 2.21

Die Umkehrung (Spiegelung) von $w = a_1 \dots a_n$ ist $w^R := a_n \dots a_1$.
Die Umkehrung einer Sprache A ist $A^R := \{w^R \mid w \in A\}$

Satz 2.22

Ist A eine reguläre Sprache, dann auch A^R.

Beweis:

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit $L(M) = A$.
Wir konstruieren nun einen ϵ-NFA M' mit $L(M') = A^R$:

Definition 2.21

Die Umkehrung (Spiegelung) von $w = a_1 \dots a_n$ ist $w^R := a_n \dots a_1$.
Die Umkehrung einer Sprache A ist $A^R := \{w^R \mid w \in A\}$

Satz 2.22

Ist A eine reguläre Sprache, dann auch A^R.

Beweis:

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit $L(M) = A$.
Wir konstruieren nun einen ϵ-NFA M' mit $L(M') = A^R$:

- Kehre alle Übergänge um: $p \xrightarrow{a} q \rightsquigarrow p \xleftarrow{a} q$
- Füge einen neuen Startzustand q_0' hinzu mit $q_0' \xrightarrow{\epsilon} f$ für alle $f \in F$.

Definition 2.21

Die Umkehrung (Spiegelung) von $w = a_1 \dots a_n$ ist $w^R := a_n \dots a_1$.
Die Umkehrung einer Sprache A ist $A^R := \{w^R \mid w \in A\}$

Satz 2.22

Ist A eine reguläre Sprache, dann auch A^R.

Beweis:

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit $L(M) = A$.
Wir konstruieren nun einen ϵ-NFA M' mit $L(M') = A^R$:

- Kehre alle Übergänge um: $p \xrightarrow{a} q \rightsquigarrow p \xleftarrow{a} q$
- Füge einen neuen Startzustand q_0' hinzu mit $q_0' \xrightarrow{\epsilon} f$ für alle $f \in F$.
- Mache q_0 zum (einzigen) Endzustand.

Definition 2.21

Die Umkehrung (Spiegelung) von $w = a_1 \dots a_n$ ist $w^R := a_n \dots a_1$.
Die Umkehrung einer Sprache A ist $A^R := \{w^R \mid w \in A\}$

Satz 2.22

Ist A eine reguläre Sprache, dann auch A^R.

Beweis:

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit $L(M) = A$.
Wir konstruieren nun einen ϵ-NFA M' mit $L(M') = A^R$:

- Kehre alle Übergänge um: $p \xrightarrow{a} q \rightsquigarrow p \xleftarrow{a} q$
- Füge einen neuen Startzustand q_0' hinzu mit $q_0' \xrightarrow{\epsilon} f$ für alle $f \in F$.
- Mache q_0 zum (einzigen) Endzustand.

Dann gilt $L(M') = A^R$.

Definition 2.21

Die Umkehrung (Spiegelung) von $w = a_1 \dots a_n$ ist $w^R := a_n \dots a_1$.
Die Umkehrung einer Sprache A ist $A^R := \{w^R \mid w \in A\}$

Satz 2.22

Ist A eine reguläre Sprache, dann auch A^R.

Beweis:

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit $L(M) = A$.
Wir konstruieren nun einen ϵ-NFA M' mit $L(M') = A^R$:

- Kehre alle Übergänge um: $p \xrightarrow{a} q \rightsquigarrow p \xleftarrow{a} q$
- Füge einen neuen Startzustand q_0' hinzu mit $q_0' \xrightarrow{\epsilon} f$ für alle $f \in F$.
- Mache q_0 zum (einzigen) Endzustand.

Dann gilt $L(M') = A^R$.

$A \cap A^R$

Beweis (Forts.):

Formal: $M' = (Q \cup \{q_0'\}, \Sigma, \delta', q_0', \{q_0\})$ mit

- $q_0' \notin Q$,

Beweis (Forts.):

Formal: $M' = (Q \cup \{q_0'\}, \Sigma, \delta', q_0', \{q_0\})$ mit

- $q_0' \notin Q$,
- $\delta'(q, a) = \{p \mid \delta(p, a) = q\}$
- $\delta'(q_0', \epsilon) = F$

Beweis (Forts.):

Formal: $M' = (Q \cup \{q_0'\}, \Sigma, \delta', q_0', \{q_0\})$ mit

- $q_0' \notin Q$,
- $\delta'(q, a) = \{p \mid \delta(p, a) = q\}$
- $\delta'(q_0', \epsilon) = F$

Dann gilt $w^R \in L(M') \Leftrightarrow w \in L(M)$.
Beweis mit Induktion über w. $\square$

Beweis (Forts.):

Formal: $M' = (Q \cup \{q_0'\}, \Sigma, \delta', q_0', \{q_0\})$ mit

- $q_0' \notin Q$,
- $\delta'(q, a) = \{p \mid \delta(p, a) = q\}$
- $\delta'(q_0', \epsilon) = F$

Dann gilt $w^R \in L(M') \Leftrightarrow w \in L(M)$.
Beweis mit Induktion über w. $\square$

Beweis (Forts.):

Formal: $M' = (Q \cup \{q_0'\}, \Sigma, \delta', q_0', \{q_0\})$ mit

- $q_0' \notin Q$,
- $\delta'(q, a) = \{p \mid \delta(p, a) = q\}$
- $\delta'(q_0', \epsilon) = F$

Dann gilt $w^R \in L(M') \Leftrightarrow w \in L(M)$.
Beweis mit Induktion über w. $\square$

$\forall q \in Q: \hat{\delta}(q, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}'(q_0', w^R) \ni q$

2.7 Rechnen mit regulären Ausdrücken

Definition 2.23
Zwei reguläre Ausdrücke sind äquivalent gdw sie die gleiche Sprache darstellen:

$$\alpha \equiv \beta \;:\Leftrightarrow\; L(\alpha) = L(\beta)$$

2.7 Rechnen mit regulären Ausdrücken

Definition 2.23
Zwei reguläre Ausdrücke sind äquivalent gdw sie die gleiche Sprache darstellen:

$$\alpha \equiv \beta \;:\Leftrightarrow\; L(\alpha) = L(\beta)$$

Beispiel zum Unterschied von $=$ (syntaktische Identität) und $\equiv$ (Bedeutungsäquivalenz):

2.7 Rechnen mit regulären Ausdrücken

Definition 2.23
Zwei reguläre Ausdrücke sind äquivalent gdw sie die gleiche Sprache darstellen:

$$\alpha \equiv \beta \;:\Leftrightarrow\; L(\alpha) = L(\beta)$$

Beispiel zum Unterschied von $=$ (syntaktische Identität) und $\equiv$ (Bedeutungsäquivalenz): $\epsilon \equiv \emptyset^*$ aber $\epsilon \neq \emptyset^*$.

Null und Eins:

Lemma 2.24

- $\emptyset \mid \alpha \equiv \alpha \mid \emptyset \equiv \alpha$

Null und Eins:

Lemma 2.24

- $\emptyset \mid \alpha \equiv \alpha \mid \emptyset \equiv \alpha$
- $\emptyset\alpha \equiv \alpha\emptyset \equiv \emptyset$

Null und Eins:

Lemma 2.24

- $\emptyset \mid \alpha \equiv \alpha \mid \emptyset \equiv \alpha$
- $\emptyset\alpha \equiv \alpha\emptyset \equiv \emptyset$
- $\epsilon\alpha \equiv \alpha\epsilon \equiv \alpha$

Null und Eins:

Lemma 2.24

- $\emptyset \mid \alpha \equiv \alpha \mid \emptyset \equiv \alpha$
- $\emptyset\alpha \equiv \alpha\emptyset \equiv \emptyset$
- $\epsilon\alpha \equiv \alpha\epsilon \equiv \alpha$
- $\emptyset^* \equiv \epsilon$
- $\epsilon^* \equiv \epsilon$

Lemma 2.25

Assoziativität:

- $(\alpha \mid \beta) \mid \gamma \equiv \alpha \mid (\beta \mid \gamma)$

Lemma 2.25

Assoziativität:

- $(\alpha \mid \beta) \mid \gamma \equiv \alpha \mid (\beta \mid \gamma)$
- $(\alpha\beta)\gamma \equiv \alpha(\beta\gamma)$

Lemma 2.25

Assoziativität:

- $(\alpha \mid \beta) \mid \gamma \equiv \alpha \mid (\beta \mid \gamma)$
- $(\alpha\beta)\gamma \equiv \alpha(\beta\gamma)$

Kommutativität:

- $\alpha \mid \beta \equiv \beta \mid \alpha$

Distributivität:

- $\alpha(\beta \mid \gamma) \equiv \alpha\beta \mid \alpha\gamma$
- $(\alpha \mid \beta)\gamma \equiv \alpha\gamma \mid \beta\gamma$

Lemma 2.25

Assoziativität:

- $(\alpha \mid \beta) \mid \gamma \equiv \alpha \mid (\beta \mid \gamma)$
- $(\alpha\beta)\gamma \equiv \alpha(\beta\gamma)$

Kommutativität:

- $\alpha \mid \beta \equiv \beta \mid \alpha$

Distributivität:

- $\alpha(\beta \mid \gamma) \equiv \alpha\beta \mid \alpha\gamma$
- $(\alpha \mid \beta)\gamma \equiv \alpha\gamma \mid \beta\gamma$

Idempotenz:

- $\alpha \mid \alpha \equiv \alpha$

Lemma 2.25

Assoziativität:

- $(\alpha \mid \beta) \mid \gamma \equiv \alpha \mid (\beta \mid \gamma)$
- $(\alpha\beta)\gamma \equiv \alpha(\beta\gamma)$

Kommutativität:

- $\alpha \mid \beta \equiv \beta \mid \alpha$

Distributivität:

- $\alpha(\beta \mid \gamma) \equiv \alpha\beta \mid \alpha\gamma$
- $(\alpha \mid \beta)\gamma \equiv \alpha\gamma \mid \beta\gamma$

Idempotenz:

- $\alpha \mid \alpha \equiv \alpha$