Script generated by TTT

Title: seidl: Theoretische_Informatik (28.06.2012)

Date: Thu Jun 28 16:11:17 CEST 2012

Duration: 79:15 min

Pages: 62

Beweis:

Für $w = a_1 \ldots a_n$:

$$\begin{array}{rcl} \overline{w} & := & \#a_1\#a_2\# \ldots \#a_n\# \\ \overleftarrow{w} & := & a_1\#a_2\# \ldots \#a_n\# \\ \overrightarrow{w} & := & \#a_1\#a_2\# \ldots \#a_n \end{array}$$

$$f((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)) := ((\overline{x_1}, \overrightarrow{y_1}), (\overleftarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}), \ldots, (\overleftarrow{x_k}, \overrightarrow{y_k}), (\$, \#\$))$$

Lemma 4.79

Das PCP ist semi-entscheidbar.

Beweis:

Zähle die möglichen Lösungen der Länge nach auf, und probiere jeweils, ob es eine wirkliche Lösung ist. □

Wir zeigen nun:

$$H \leq MPCP \leq PCP$$

wobei

Definition 4.80 (Modifiziertes PCP, MPCP)

Gegeben: wie beim PCP

Problem: Gibt es eine Lösung $i_1, \ldots, i_n$ mit $i_1 = 1$?

Satz 4.81

$$MPCP \leq PCP$$

Lemma 4.79

Das PCP ist semi-entscheidbar.

Beweis:

Zähle die möglichen Lösungen der Länge nach auf, und probiere jeweils, ob es eine wirkliche Lösung ist. □

Wir zeigen nun:

$$H \leq MPCP \leq PCP$$

wobei

Definition 4.80 (Modifiziertes PCP, MPCP)

Gegeben: wie beim PCP

Problem: Gibt es eine Lösung $i_1, \ldots, i_n$ mit $i_1 = 1$?

Satz 4.81

$$MPCP \leq PCP$$

Beweis:

Für $w = a_1 \dots a_n$:

$$\begin{aligned}
\overline{w} &:= \#a_1\#a_2\#\dots\#a_n\# \\
\overleftarrow{w} &:= a_1\#a_2\#\dots\#a_n\# \\
\overrightarrow{w} &:= \#a_1\#a_2\#\dots\#a_n
\end{aligned}$$

$$f((x_1,y_1),\dots,(x_k,y_k)) := ((\overline{x_1},\overrightarrow{y_1}),(\overleftarrow{x_1},\overrightarrow{y_1}),\dots,(\overleftarrow{x_k},\overrightarrow{y_k}),(\$,\#\$))$$

Beweis:

Für $w = a_1 \dots a_n$:

$$\begin{aligned}
\overline{w} &:= \#a_1\#a_2\#\dots\#a_n\# \\
\overleftarrow{w} &:= a_1\#a_2\#\dots\#a_n\# \\
\overrightarrow{w} &:= \#a_1\#a_2\#\dots\#a_n
\end{aligned}$$

$$f((x_1,y_1),\dots,(x_k,y_k)) := ((\overline{x_1},\overrightarrow{y_1}),(\overleftarrow{x_1},\overrightarrow{y_1}),\dots,(\overleftarrow{x_k},\overrightarrow{y_k}),(\$,\#\$))$$

Satz 4.82

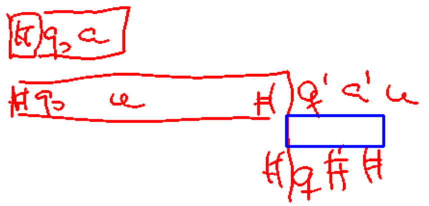
$$H \le MPCP$$

Satz 4.82

$$H \le MPCP$$

Beweis:

- $(\#, \#q_0u\#)$
- (a, a) für alle $a \in \Gamma \cup \{\#\}$
- $(qa, q'a')$ falls $\delta(q, a) = (q', a', N)$
  $(qa, a'q')$ falls $\delta(q, a) = (q', a', R)$
  $(bqa, q'ba')$ falls $\delta(q, a) = (q', a', L)$, für alle $b \in \Gamma$
- $(\#, \Box\#)$, $(\#, \#\Box)$
- (aq, q), (qa, q) für alle $q \in F, a \in \Gamma$
- $(\boxed{\cancel{q\#\#}}, \#)$ für alle $q \in F$



Aus $H \leq PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Aus $H \leq PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Korollar 4.84
Das PCP ist auch für $\Sigma = \{0, 1\}$ unentscheidbar

Aus $H \leq PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Korollar 4.84
Das PCP ist auch für $\Sigma = \{0, 1\}$ unentscheidbar

Beweis:
Wir nennen dies das 01-PCP und zeigen PCP $\leq$ 01-PCP.

Aus $H \leq PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Korollar 4.84
Das PCP ist auch für $\Sigma = \{0, 1\}$ unentscheidbar

Beweis:
Wir nennen dies das 01-PCP und zeigen PCP $\leq$ 01-PCP.
Sei $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ das Alphabet des gegebenen PCPs.

Abbildung auf ein 01-PCP: $\widehat{a_j} := 01^j$

Aus $H \leq PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Korollar 4.84
Das PCP ist auch für $\Sigma = \{0, 1\}$ unentscheidbar

Beweis:
Wir nennen dies das 01-PCP und zeigen PCP $\leq$ 01-PCP.
Sei $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ das Alphabet des gegebenen PCPs.

Abbildung auf ein 01-PCP:
$$\begin{aligned} \widehat{a_j} &:= 01^j \\ \widehat{a_{j_1} \dots a_{j_n}} &:= \widehat{a_{j_1}} \dots \widehat{a_{j_n}} \end{aligned}$$

Aus $H \leq PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Korollar 4.84
Das PCP ist auch für $\Sigma = \{0, 1\}$ unentscheidbar

Beweis:
Wir nennen dies das 01-PCP und zeigen PCP $\leq$ 01-PCP.
Sei $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ das Alphabet des gegebenen PCPs.

Abbildung auf ein 01-PCP:
$$\begin{aligned} \widehat{a_j} &:= 01^j \\ \widehat{a_{j_1} \dots a_{j_n}} &:= \widehat{a_{j_1}} \dots \widehat{a_{j_n}} \end{aligned}$$

Dann hat $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ eine Lösung gdw
$(\widehat{x_1}, \widehat{y_1}), \dots, (\widehat{x_k}, \widehat{y_k})$ eine Lösung hat.

Aus $H \leq PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Korollar 4.84
Das PCP ist auch für $\Sigma = \{0, 1\}$ unentscheidbar

Beweis:
Wir nennen dies das 01-PCP und zeigen PCP $\leq$ 01-PCP.
Sei $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ das Alphabet des gegebenen PCPs.

Abbildung auf ein 01-PCP:
$$\begin{aligned} \widehat{a_j} &:= 01^j \\ \widehat{a_{j_1} \dots a_{j_n}} &:= \widehat{a_{j_1}} \dots \widehat{a_{j_n}} \end{aligned}$$

Dann hat $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ eine Lösung gdw
$(\widehat{x_1}, \widehat{y_1}), \dots, (\widehat{x_k}, \widehat{y_k})$ eine Lösung hat.

„$\Rightarrow$“ klar,

Aus $H \leq PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Korollar 4.84
Das PCP ist auch für $\Sigma = \{0, 1\}$ unentscheidbar

Beweis:
Wir nennen dies das 01-PCP und zeigen PCP $\leq$ 01-PCP.
Sei $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ das Alphabet des gegebenen PCPs.

Abbildung auf ein 01-PCP:
$$\begin{aligned} \widehat{a_j} &:= 01^j \\ \widehat{a_{j_1} \dots a_{j_n}} &:= \widehat{a_{j_1}} \dots \widehat{a_{j_n}} \end{aligned}$$

Dann hat $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ eine Lösung gdw
$(\widehat{x_1}, \widehat{y_1}), \dots, (\widehat{x_k}, \widehat{y_k})$ eine Lösung hat.
„$\Rightarrow$“ klar, „$\Leftarrow$“ folgt da $\hat{\cdot} : \Sigma^* \to \{0, 1\}^*$ injektive ist:

Aus $H \leq PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Korollar 4.84
Das PCP ist auch für $\Sigma = \{0, 1\}$ unentscheidbar

Beweis:
Wir nennen dies das 01-PCP und zeigen PCP $\leq$ 01-PCP.
Sei $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ das Alphabet des gegebenen PCPs.

Abbildung auf ein 01-PCP:
$$\begin{aligned} \widehat{a_j} &:= 01^j \\ \widehat{a_{j_1} \dots a_{j_n}} &:= \widehat{a_{j_1}} \dots \widehat{a_{j_n}} \end{aligned}$$

Dann hat $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ eine Lösung gdw
$(\widehat{x_1}, \widehat{y_1}), \dots, (\widehat{x_k}, \widehat{y_k})$ eine Lösung hat.
„$\Rightarrow$“ klar, „$\Leftarrow$“ folgt da $\hat{\cdot} : \Sigma^* \to \{0, 1\}^*$ injektive ist:

$$\begin{aligned} \widehat{x_{i_1}} \dots \widehat{x_{i_n}} = \widehat{y_{i_1}} \dots \widehat{y_{i_n}} &\implies \\ \widehat{x_{i_1} \dots x_{i_n}} = \widehat{y_{i_1} \dots y_{i_n}} &\implies \quad x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n} \end{aligned}$$ $\square$

Bemerkungen

- Das PCP ist entscheidbar falls $|\Sigma| = 1$

(11, 111)
2 , 3

Bemerkungen

- Das PCP ist entscheidbar falls $|\Sigma| = 1$
- Das PCP ist entscheidbar falls $k \leq 2$.

Bemerkungen

- Das PCP ist entscheidbar falls $|\Sigma| = 1$
- Das PCP ist entscheidbar falls $k \leq 2$.
- Das PCP ist unentscheidbar falls $k \geq 7$.

Bemerkungen

- Das PCP ist entscheidbar falls $|\Sigma| = 1$
- Das PCP ist entscheidbar falls $k \leq 2$.
- Das PCP ist unentscheidbar falls $k \geq 7$.
- Für $k = 3, \ldots, 6$ ist noch offen, ob das PCP unentscheidbar ist.

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar:

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar:
  $L(A) = \emptyset$,

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar:
  $L(A) = \emptyset$, $L(A) = L(B)$, $\ldots$
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar:

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar:
  $L(A) = \emptyset$, $L(A) = L(B)$, $\ldots$
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar:
  $L(M) = \emptyset$, $L(M_1) = L(M_2)$, $\ldots$
- Für CFGs ist manches enscheidbar $(L(G) = \emptyset)$,

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar:
  $L(A) = \emptyset$, $L(A) = L(B)$, $\ldots$
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar:
  $L(M) = \emptyset$, $L(M_1) = L(M_2)$, $\ldots$
- Für CFGs ist manches enscheidbar $(L(G) = \emptyset)$,

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar:
  $L(A) = \emptyset$, $L(A) = L(B)$, $\ldots$
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar:
  $L(M) = \emptyset$, $L(M_1) = L(M_2)$, $\ldots$
- Für CFGs ist manches enscheidbar $(L(G) = \emptyset)$,
  und manches unentscheidbar: $L(G_1) = L(G_2)$, $\ldots$

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar: $L(A) = \emptyset$, $L(A) = L(B)$, ...
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar: $L(M) = \emptyset$, $L(M_1) = L(M_2)$, ...
- Für CFGs ist manches enscheidbar ($L(G) = \emptyset$), und manches unentscheidbar: $L(G_1) = L(G_2)$, ...

Satz 4.85

Für CFGs G_1, G_2 sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?*

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar: $L(A) = \emptyset$, $L(A) = L(B)$, ...
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar: $L(M) = \emptyset$, $L(M_1) = L(M_2)$, ...
- Für CFGs ist manches enscheidbar ($L(G) = \emptyset$), und manches unentscheidbar: $L(G_1) = L(G_2)$, ...

Satz 4.85

Für CFGs G_1, G_2 sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?*

2. *Ist $|L(G_1) \cap L(G_2)| = \infty$?*

Beweis:

$K = (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ wird abgebildet auf G_1

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & A\$B \\ A & \rightarrow & a_1 A x_1 \mid \cdots \mid a_k A x_k \\ A & \rightarrow & a_1 x_1 \mid \cdots \mid a_k x_k \\ B & \rightarrow & y_1^R B a_1 \mid \cdots \mid y_k^R B a_k \\ B & \rightarrow & y_1^R a_1 \mid \cdots \mid y_k^R a_k \end{array}$$

und G_2:

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & a_1 S a_1 \mid \cdots \mid a_k S a_k \mid T \\ T & \rightarrow & 0T0 \mid 1T1 \mid \$ \end{array}$$

$L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$

$\Longleftrightarrow$ K hat eine Lösung

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar: $L(A) = \emptyset$, $L(A) = L(B)$, ...
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar: $L(M) = \emptyset$, $L(M_1) = L(M_2)$, ...
- Für CFGs ist manches enscheidbar ($L(G) = \emptyset$), und manches unentscheidbar: $L(G_1) = L(G_2)$, ...

Satz 4.85

Für CFGs G_1, G_2 sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?*
2. *Ist $|L(G_1) \cap L(G_2)| = \infty$?*

3. *Ist $L(G_1) \cap L(G_2)$ kontextfrei?*
4. *Ist $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?*
5. *Ist $L(G_1) = L(G_2)$?*

Beweis:
$K = (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ wird abgebildet auf G_1

$$\begin{array}{lcl} S & \to & A\$B \\ A & \to & a_1 A x_1 \mid \cdots \mid a_k A x_k \\ A & \to & a_1 x_1 \mid \cdots \mid a_k x_k \\ B & \to & y_1^R B a_1 \mid \cdots \mid y_k^R B a_k \\ B & \to & y_1^R a_1 \mid \cdots \mid y_k^R a_k \end{array}$$

und G_2:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & a_1 S a_1 \mid \cdots \mid a_k S a_k \mid T \\ T & \to & 0T0 \mid 1T1 \mid \$ \end{array}$$

Satz 4.86
Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*

Satz 4.86
Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Satz 4.86
Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:
1. G *mehrdeutig*:

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.

K lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.

K lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$ ist mehrdeutig

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.

K lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$

Beweis (Forts.):

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.
K lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$ ist mehrdeutig
„$\Rightarrow$“: Syntaxbäume von G_1 und G_2 disjunkt
„$\Leftarrow$“: G_1 und G_2 sind DCFG und damit nicht mehrdeutig
Damit ist $K \mapsto G_3$ Reduktion für $PCP \leq$ Mehrdeutigkeit.

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.
K lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$ ist mehrdeutig
„$\Rightarrow$“: Syntaxbäume von G_1 und G_2 disjunkt
„$\Leftarrow$“: G_1 und G_2 sind DCFG und damit nicht mehrdeutig
Damit ist $K \mapsto G_3$ Reduktion für $PCP \leq$ Mehrdeutigkeit.

2/3. *$L(G)$ regulär/deterministisch*: Sei $G_4 :=$ „$G_1' \cup G_2'$“.

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.
K lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$ ist mehrdeutig
„$\Rightarrow$“: Syntaxbäume von G_1 und G_2 disjunkt
„$\Leftarrow$“: G_1 und G_2 sind DCFG und damit nicht mehrdeutig
Damit ist $K \mapsto G_3$ Reduktion für $PCP \leq$ Mehrdeutigkeit.

2/3. *$L(G)$ regulär/deterministisch*:

Beweis (Forts.):

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.
K lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$ ist mehrdeutig
„$\Rightarrow$“: Syntaxbäume von G_1 und G_2 disjunkt
„$\Leftarrow$“: G_1 und G_2 sind DCFG und damit nicht mehrdeutig
Damit ist $K \mapsto G_3$ Reduktion für $PCP \leq$ Mehrdeutigkeit.

2/3. *$L(G)$ regulär/deterministisch*: Sei $G_4 :=$ „$G_1' \cup G_2'$“.
K unlösbar $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.
K lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$ ist mehrdeutig
„$\Rightarrow$“: Syntaxbäume von G_1 und G_2 disjunkt
„$\Leftarrow$“: G_1 und G_2 sind DCFG und damit nicht mehrdeutig
Damit ist $K \mapsto G_3$ Reduktion für $PCP \leq$ Mehrdeutigkeit.

2/3. *$L(G)$ regulär/deterministisch*: Sei $G_4 :=$ „$G_1' \cup G_2'$“.
K unlösbar $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset \Rightarrow L(G_4) = \Sigma^* \Rightarrow L(G_4)$ reg/det.

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.
K lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$ ist mehrdeutig
„$\Rightarrow$“: Syntaxbäume von G_1 und G_2 disjunkt
„$\Leftarrow$“: G_1 und G_2 sind DCFG und damit nicht mehrdeutig
Damit ist $K \mapsto G_3$ Reduktion für $PCP \leq$ Mehrdeutigkeit.

2/3. *$L(G)$ regulär/deterministisch*: Sei $G_4 :=$ „$G_1' \cup G_2'$“.
K unlösbar $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset \Rightarrow L(G_4) = \Sigma^* \Rightarrow L(G_4)$ reg/det.
K lösbar $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2)$ nicht CFL

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.
K lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$ ist mehrdeutig
„$\Rightarrow$“: Syntaxbäume von G_1 und G_2 disjunkt
„$\Leftarrow$“: G_1 und G_2 sind DCFG und damit nicht mehrdeutig
Damit ist $K \mapsto G_3$ Reduktion für $PCP \leq$ Mehrdeutigkeit.

2/3. *$L(G)$ regulär/deterministisch*: Sei $G_4 :=$ „$G_1' \cup G_2'$“.
K unlösbar $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset \Rightarrow L(G_4) = \Sigma^* \Rightarrow L(G_4)$ reg/det.
K lösbar $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2)$ nicht CFL $\Rightarrow \overline{L(G_4)}$ nicht reg/det

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.
K lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$ ist mehrdeutig
„$\Rightarrow$“: Syntaxbäume von G_1 und G_2 disjunkt
„$\Leftarrow$“: G_1 und G_2 sind DCFG und damit nicht mehrdeutig
Damit ist $K \mapsto G_3$ Reduktion für $PCP \leq$ Mehrdeutigkeit.

2/3. *$L(G)$ regulär/deterministisch*: Sei $G_4 :=$ „$G_1' \cup G_2'$“.
K unlösbar $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset \Rightarrow L(G_4) = \Sigma^* \Rightarrow L(G_4)$ reg/det.
K lösbar $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2)$ nicht CFL $\Rightarrow \overline{L(G_4)}$ nicht reg/det
$\Rightarrow L(G_4)$ nicht reg/det.
Damit ist $K \mapsto G_4$ Reduktion für $PCP \leq L(G)$ reg/det. $\square$

Satz 4.87

Für eine CFG G und einen RE α ist $L(G) = L(\alpha)$ unentscheidbar.

Beweis:

Im Beweis des vorherigen Satzes hatten wir eine Reduktion $K \mapsto G_4$ mit

$$K \text{ unlösbar} \quad \Leftrightarrow \quad L(G_4) = \Sigma^*.$$

Satz 4.87

Für eine CFG G und einen RE α ist $L(G) = L(\alpha)$ unentscheidbar.

Beweis:

Im Beweis des vorherigen Satzes hatten wir eine Reduktion $K \mapsto G_4$ mit

$$K \text{ unlösbar} \quad \Leftrightarrow \quad L(G_4) = \Sigma^*.$$

Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dann reduziert $K \mapsto (G_4, (a_1 | \ldots | a_n)^*)$ das PCP auf das Problem $L(G) = L(\alpha)$. $\square$

Satz 4.87

Für eine CFG G und einen RE α ist $L(G) = L(\alpha)$ unentscheidbar.

Beweis:

Im Beweis des vorherigen Satzes hatten wir eine Reduktion $K \mapsto G_4$ mit

$$K \text{ unlösbar } \Leftrightarrow L(G_4) = \Sigma^*.$$

Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dann reduziert $K \mapsto (G_4, (a_1|\ldots|a_n)^*)$ das PCP auf das Problem $L(G) = L(\alpha)$, □

5. Komplexitätstheorie

5. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?

5. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?
- Wieviel Zeit&Platz braucht man,
  um ein bestimmtes Problem/Sprache zu entscheiden?

5. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?
- Wieviel Zeit&Platz braucht man,
  um ein bestimmtes Problem/Sprache zu entscheiden?
- **Komplexität eines Problems**, nicht eines Algorithmus.

5. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?
- Wieviel Zeit&Platz braucht man,
  um ein bestimmtes Problem/Sprache zu entscheiden?
- **Komplexität eines Problems**, nicht eines Algorithmus.
- **Obere Schranken**: durch Angabe eines Algorithmus

5. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?
- Wieviel Zeit&Platz braucht man,
  um ein bestimmtes Problem/Sprache zu entscheiden?
- **Komplexität eines Problems**, nicht eines Algorithmus.
- **Obere Schranken**: durch Angabe eines Algorithmus
  Bsp: $w \in L(G)$ für CFGs ist in Zeit $O(|w|^3)$ lösbar, mit CYK.
- **Untere Schranken**: schwierig ...

5. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?
- Wieviel Zeit&Platz braucht man,
  um ein bestimmtes Problem/Sprache zu entscheiden?
- **Komplexität eines Problems**, nicht eines Algorithmus.
- **Obere Schranken**: durch Angabe eines Algorithmus
  Bsp: $w \in L(G)$ für CFGs ist in Zeit $O(|w|^3)$ lösbar, mit CYK.
- **Untere Schranken**: schwierig ...
  Bsp: Palindrom-Test auf einer 1-Band TM braucht Zeit $\boxed{\Theta(n^2)}$

5. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?
- Wieviel Zeit&Platz braucht man,
  um ein bestimmtes Problem/Sprache zu entscheiden?
- **Komplexität eines Problems**, nicht eines Algorithmus.
- **Obere Schranken**: durch Angabe eines Algorithmus
  Bsp: $w \in L(G)$ für CFGs ist in Zeit $O(|w|^3)$ lösbar, mit CYK.
- **Untere Schranken**: schwierig ...
  Bsp: Palindrom-Test auf einer 1-Band TM braucht Zeit $\Theta(n^2)$
  Nicht hier.
- Einfluss des Maschinenmodells:
  Deterministisch oder Nichtdeterministisch

Polynomielle und exponentielle Komplexität

Taktfrequenz: 1GHz

	Problemgröße n					
Zeit	10	20	30	40	50	60
n	.01 ms	.02 ms	.03 ms	.04 ms	.05 ms	.06 ms
n^2	.1 ms	.4 ms	.9 ms	1.6 ms	2.5 ms	3.6 ms
n^5	100ms	0.003s	0.02s	0.1 s	0.3 s	0.7 s
2^n	1 ms	0.001s	1 s	18 m	13 T	36 J
3^n	59 ms	3 s	2 T	385J	$2 \cdot 10^7$J	10^{12}J

ms=Mikrosek., s=Sek., m=Minute, T=Tag, J=Jahr

Polynomielle und exponentielle Komplexität

Taktfrequenz: 1GHz

	Problemgröße n					
Zeit	10	20	30	40	50	60
n	.01 ms	.02 ms	.03 ms	.04 ms	.05 ms	.06 ms
n^2	.1 ms	.4 ms	.9 ms	1.6 ms	2.5 ms	3.6 ms
n^5	100ms	0.003s	0.02s	0.1 s	0.3 s	0.7 s
2^n	1 ms	0.001s	1 s	18 m	13 T	36 J
3^n	59 ms	3 s	2 T	385J	$2 \cdot 10^7$J	10^{12}J

ms=Mikrosek., s=Sek., m=Minute, T=Tag, J=Jahr