Script generated by TTT

Title: Seidl: GAD (16.06.2015)

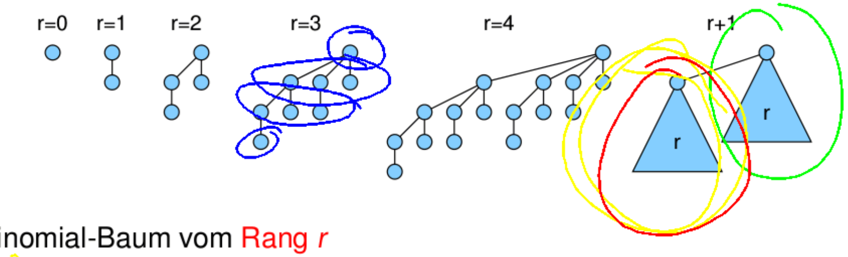
Date: Tue Jun 16 13:54:38 CEST 2015

Duration: 137:33 min

Pages: 64

Binomial-Bäume

Eigenschaften von Binomial-Bäumen:



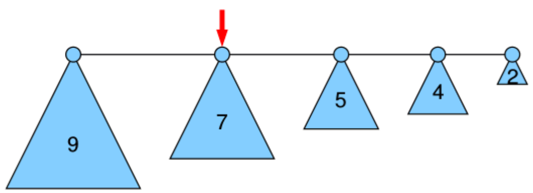
Binomial-Baum vom Rang r

- hat Höhe r (gemessen in Kanten)
- hat maximalen Grad r (Wurzel)
- hat auf Level $\ell \in \{0, \ldots, r\}$ genau $\binom{r}{\ell}$ Knoten
- hat $\sum_{\ell=0}^{r} \binom{r}{\ell} = 2^r$ Knoten
- zerfällt bei Entfernen der Wurzel in r Binomial-Bäume von Rang 0 bis $r-1$

Binomial Heap

Binomial Heap:

- verkettete Liste von Binomial-Bäumen
- pro Rang maximal 1 Binomial-Baum
- Zeiger auf Wurzel mit minimalem Prioritätswert

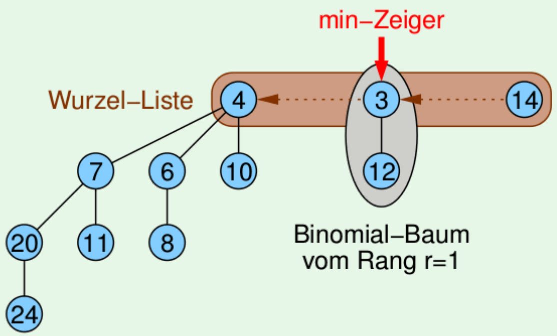


(Zahlen: Ränge)

Binomial Heap

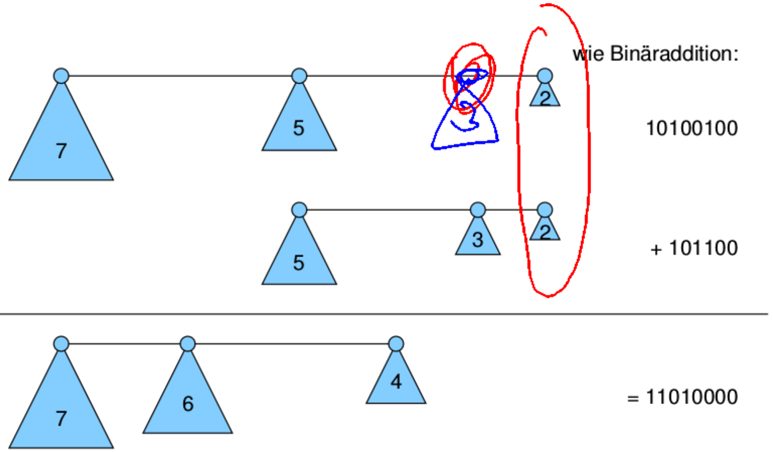
Beispiel

Korrekter Binomial Heap:



Merge von zwei Binomial Heaps

wie Binäraddition:



10100100

+ 101100

= 11010000

Aufwand für Merge: $\mathcal{O}(\log n)$

Binomial Heaps

B_i: Binomial-Baum mit Rang i

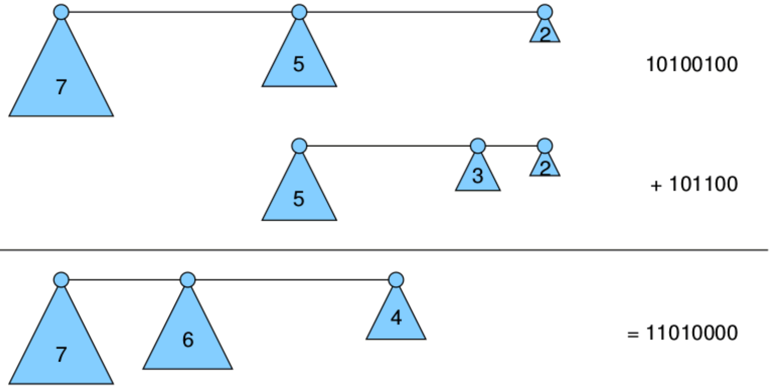
Operationen:

- merge: $\mathcal{O}(\log n)$
- insert(e): Merge mit B_0, Zeit $\mathcal{O}(\log n)$
- min(): spezieller Zeiger, Zeit $\mathcal{O}(1)$
- deleteMin():
  sei das Minimum in B_i,
  durch Löschen der Wurzel zerfällt der Binomialbaum in $B_0, \ldots, B_{i-1}$
  Merge mit dem restlichen Binomial Heap kostet $\mathcal{O}(\log n)$

Priority Queues Binomial Heaps

Merge von zwei Binomial Heaps

wie Binäraddition:



10100100

+ 101100

= 11010000

Aufwand für Merge: $\mathcal{O}(\log n)$

H. Seidl (TUM) GAD SS'15 305

Priority Queues Binomial Heaps

Binomial Heaps

B_i: Binomial-Baum mit Rang i

Operationen:

- merge: $\mathcal{O}(\log n)$
- insert(e): Merge mit B_0, Zeit $\mathcal{O}(\log n)$
- min(): spezieller Zeiger, Zeit $\mathcal{O}(1)$
- deleteMin():
  sei das Minimum in B_i,
  durch Löschen der Wurzel zerfällt der Binomialbaum in $B_0, \ldots, B_{i-1}$
  Merge mit dem restlichen Binomial Heap kostet $\mathcal{O}(\log n)$

H. Seidl (TUM) GAD SS'15 306

Binomial Heaps

Weitere Operationen:

- decreaseKey(h, k): siftUp-Operation in Binomial-Baum für das Element, auf das h zeigt,
  dann ggf. noch min-Zeiger aktualisieren

  Zeit: $\mathcal{O}(\log n)$

- remove(h): Sei e das Element, auf das h zeigt.
  Setze prio(e) $= -\infty$ und wende siftUp-Operation auf e an bis e in der Wurzel, dann weiter wie bei deleteMin

  Zeit: $\mathcal{O}(\log n)$

Bessere Laufzeit mit Fibonacci-Heaps

Fibonacci-Heaps

Verbesserung von Binomial Heaps mit folgenden Kosten:

- min, insert, merge: $\mathcal{O}(1)$ (worst case)
- decreaseKey: $\mathcal{O}(1)$ (amortisiert)
- deleteMin, remove: $\mathcal{O}(\log n)$ (amortisiert)

Wir werden darauf bei den Graph-Algorithmen zurückgreifen.

Übersicht

Vergleich Wörterbuch / Suchstruktur

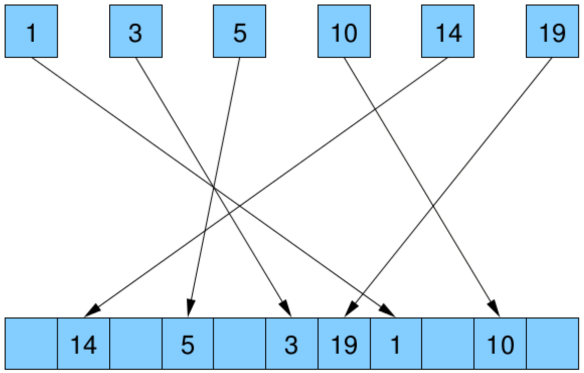
- S: Menge von Elementen
- Element e wird identifiziert über eindeutigen Schlüssel key(e)

Operationen:

- S.insert(Elem e): $S = S \cup \{e\}$
- S.remove(Key k): $S = S \setminus \{e\}$,
  wobei e das Element mit key(e) $==$ k ist
- S.find(Key k): (Wörterbuch)
  gibt das Element $e \in S$ mit key(e) $==$ k zurück, falls es existiert, sonst null
- S.locate(Key k): (Suchstruktur)
  gibt das Element $e \in S$ mit minimalem Schlüssel key(e) zurück, für das key(e) $\geq k$

Vergleich Wörterbuch / Suchstruktur

- Wörterbuch effizient über Hashing realisierbar



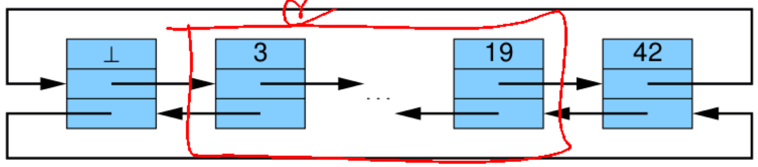
- Hashing zerstört die Ordnung auf den Elementen

$\Rightarrow$ keine effiziente locate-Operation

$\Rightarrow$ keine Intervallanfragen

Suchstruktur

Erster Ansatz: sortierte Liste



Problem:

- insert, remove, locate kosten im worst case $\Theta(n)$ Zeit

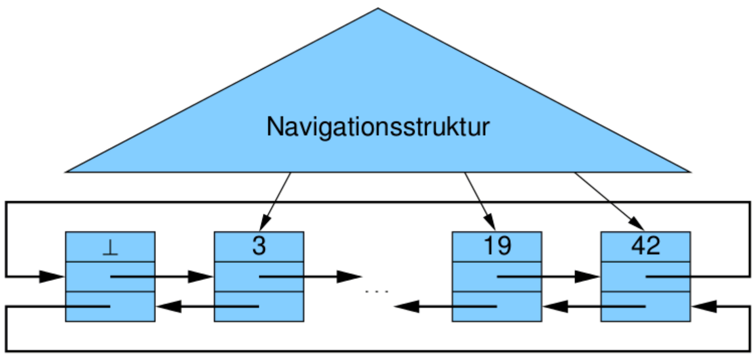
Einsicht:

- wenn locate effizient implementierbar, dann auch die anderen Operationen

Suchstruktur

Idee:

- füge Navigationsstruktur hinzu, die locate effizient macht

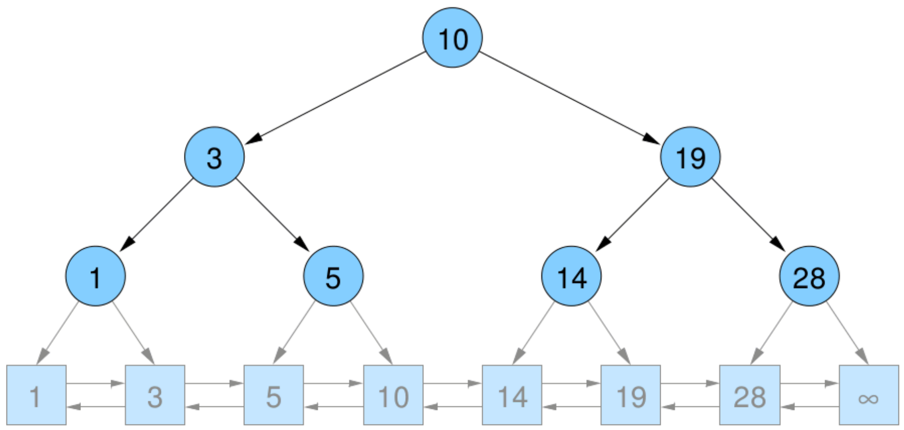


Suchbäume

extern Baumknoten enthalten nur Navigationsinformationen
Nutzdaten sind in den Blättern gespeichert.
(hier: mittels Zeiger auf Elemente einer sortierten Liste)

intern Nutzdaten sind schon an den inneren Knoten gespeichert

Binärer Suchbaum (ideal)

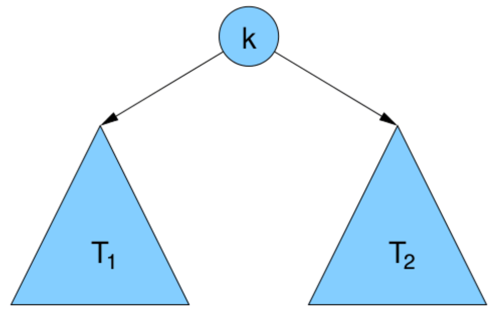


Binärer Suchbaum

Suchbaum-Regel:

Für alle Schlüssel
k_1 in T_1 und k_2 in T_2:

$$k_1 \leq k < k_2$$



locate-Strategie:

- Starte in Wurzel des Suchbaums
- Für jeden erreichten Knoten v:

  Falls $\text{key}(v) \geq k_{\text{gesucht}}$, gehe zum linken Kind von v,
  sonst gehe zum rechten Kind

Binärer Suchbaum

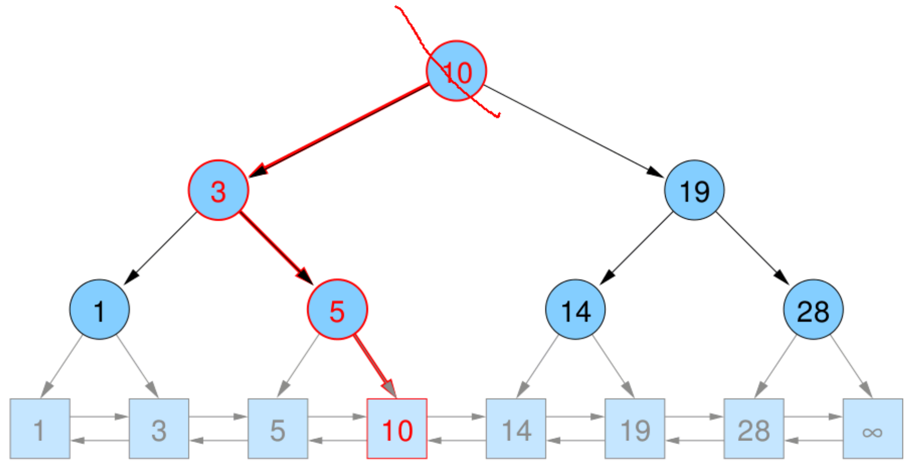
Formal: für einen Baumknoten v sei

- $\text{key}(v)$ der Schlüssel von v
- $d(v)$ der Ausgangsgrad (Anzahl Kinder) von v

- Suchbaum-Invariante: $k_1 \leq k < k_2$
  (Sortierung der linken und rechten Nachfahren)
- Grad-Invariante: $d(v) \leq 2$
  (alle Baumknoten haben höchstens 2 Kinder)
- Schlüssel-Invariante:
  (Für jedes Element e in der Liste gibt es *genau einen* Baumknoten v mit $\text{key}(v) == \text{key}(e)$)

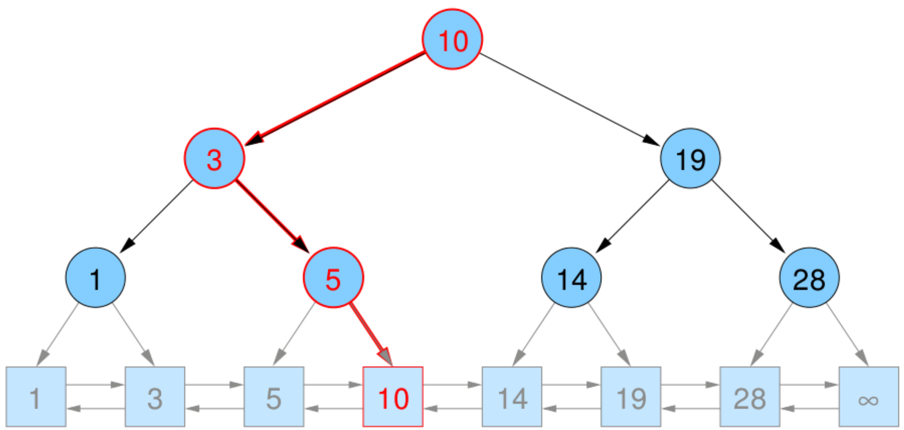
Binärer Suchbaum / locate

locate(9)



Binärer Suchbaum / locate

locate(9)

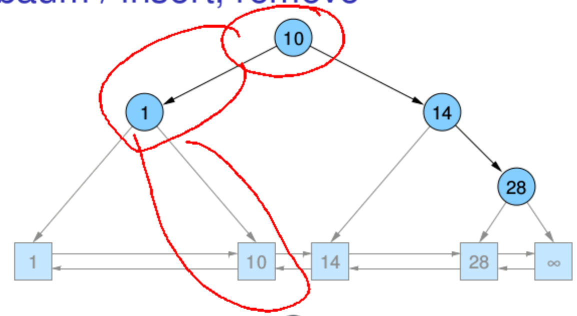


Binärer Suchbaum / insert, remove

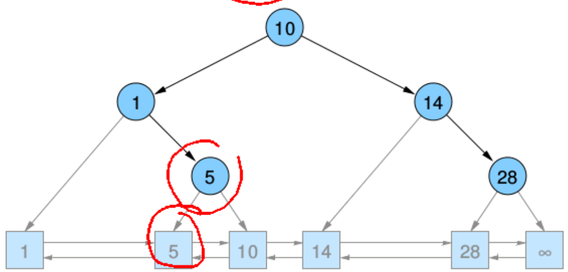
Strategie:

- insert(e):
  - erst wie locate(key(e)) bis Element e' in Liste erreicht
  - falls key(e') $>$ key(e):
    füge e vor e' ein, sowie ein neues Suchbaumblatt für e und e' mit key(e) als Splitter Key, so dass Suchbaum-Regel erfüllt

Binärer Suchbaum / insert, remove



insert(5)

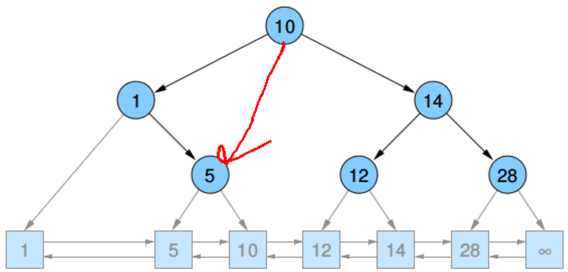


Binärer Suchbaum / insert, remove

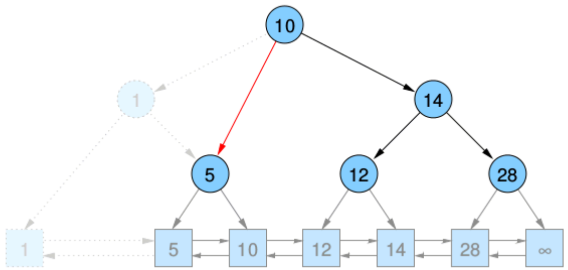
Strategie:

- insert(e):
  - erst wie locate(key(e)) bis Element e' in Liste erreicht
  - falls key(e') $>$ key(e):
    füge e vor e' ein, sowie ein neues Suchbaumblatt für e und e' mit key(e) als Splitter Key, so dass Suchbaum-Regel erfüllt
- remove(k):
  - erst wie locate(k) bis Element e in Liste erreicht
  - falls key(e) $= k$, lösche e aus Liste und Vater v von e aus Suchbaum und
  - setze in dem Baumknoten w mit key(w) $= k$ den neuen Wert key(w) $=$ key(v)

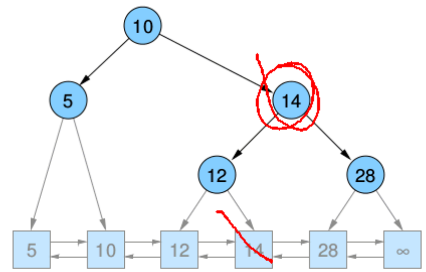
Binärer Suchbaum / insert, remove



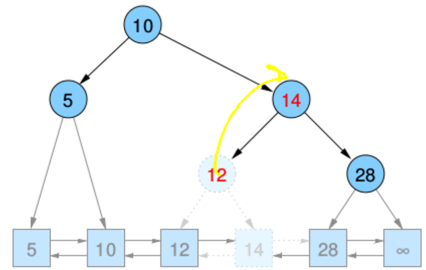
remove(1)



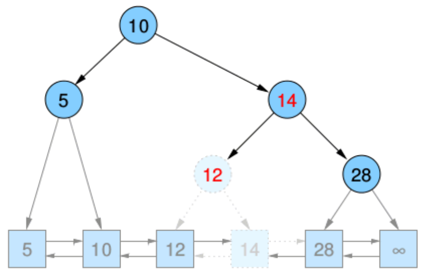
Binärer Suchbaum / insert, remove



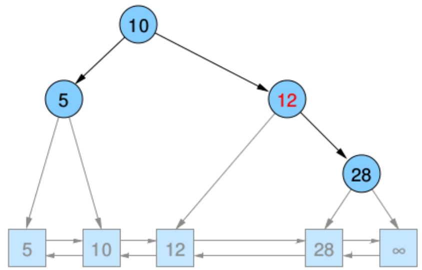
remove(14)



Binärer Suchbaum / insert, remove



remove(14)



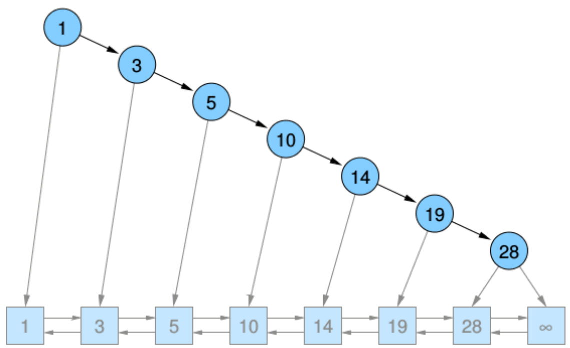
Binärer Suchbaum / worst case

Problem:

- Baumstruktur kann zur Liste entarten
- Höhe des Baums kann linear in der Anzahl der Elemente werden

⇒ locate kann im worst case Zeitaufwand $\Theta(n)$ verursachen

Beispiel: Zahlen werden in sortierter Reihenfolge eingefügt



Übersicht

AVL-Bäume

Balancierte binäre Suchbäume

Strategie zur Lösung des Problems:

- Balancierung des Baums

Georgy M. **A**delson-**V**elsky & Evgenii M. **L**andis (1962):

- Beschränkung der Höhenunterschiede für Teilbäume auf $[-1, 0, +1]$

$\Rightarrow$ führt nicht unbedingt zu einem idealen unvollständigen Binärbaum (wie wir ihn von array-basierten Heaps kennen), aber zu einem hinreichenden Gleichgewicht

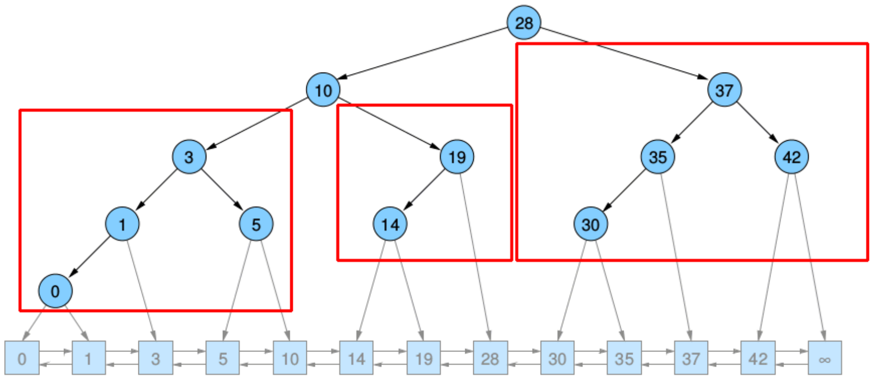
AVL-Bäume: Worst Case / Fibonacci-Baum

- Laufzeit der Operation hängt von der Baumhöhe ab
- Was ist die größte Höhe bei gegebener Anzahl von Elementen?
- bzw: Wieviel Elemente hat ein Baum mit Höhe h mindestens?
- Für mindestens ein Kind hat der Unterbaum Höhe $h-1$.
  Worst case: Unterbaum am anderen Kind hat Höhe $h-2$ (kleiner geht nicht wegen Höhendifferenzbeschränkung).

$\Rightarrow$ Anzahl der Blätter entspricht den Fibonacci-Zahlen:

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$$

AVL-Bäume: Worst Case / Fibonacci-Baum



AVL-Bäume: Worst Case / Fibonacci-Baum

- Fibonacci-Baum der Höhe 0: Baum bestehend aus einem Blatt
- Fibonacci-Baum der Höhe 1: ein innerer Knoten mit 2 Blättern
- Fibonacci-Baum der Höhe $h+1$ besteht aus einer Wurzel, deren Kinder Fibonacci-Bäume der Höhen h und $h-1$ sind

Explizite Darstellung der Fibonacci-Zahlen mit Binet-Formel:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\boxed{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right]$$

$k+2$ $k+2$

- Baum der Höhe h hat F_{h+2} Blätter bzw. $F_{h+2}-1$ innere Knoten

$\Rightarrow$ Die Anzahl der Elemente ist exponentiell in der Höhe bzw. die Höhe ist logarithmisch in der Anzahl der Elemente.

AVL-Bäume: Operationen

Operationen auf einem AVL-Baum:

- insert und remove können zunächst zu Binärbäumen führen, die die Balance-Bedingung für die Höhendifferenz der Teilbäume verletzen

$\Rightarrow$ Teilbäume müssen umgeordnet werden, um das Kriterium für AVL-Bäume wieder zu erfüllen (Rebalancierung / Rotation)

- Dazu wird an jedem Knoten die Höhendifferenz der beiden Unterbäume vermerkt ($-1, 0, +1$, mit 2 Bit / Knoten)

- Operationen locate, insert und remove haben Laufzeit $\mathcal{O}(\log n)$

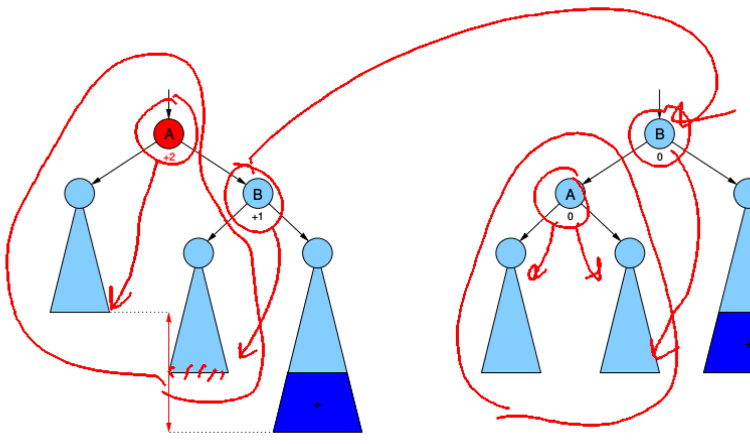
AVL-Bäume: insert

- Suche Knoten, an den das neue Blatt angehängt wird
- An diesem Knoten ändert sich die Höhendifferenz um ± 1 (linkes oder rechtes Blatt)
- gehe nun rückwärts zur Wurzel, aktualisiere die jeweilige Höhendifferenz und rebalanciere falls notwendig

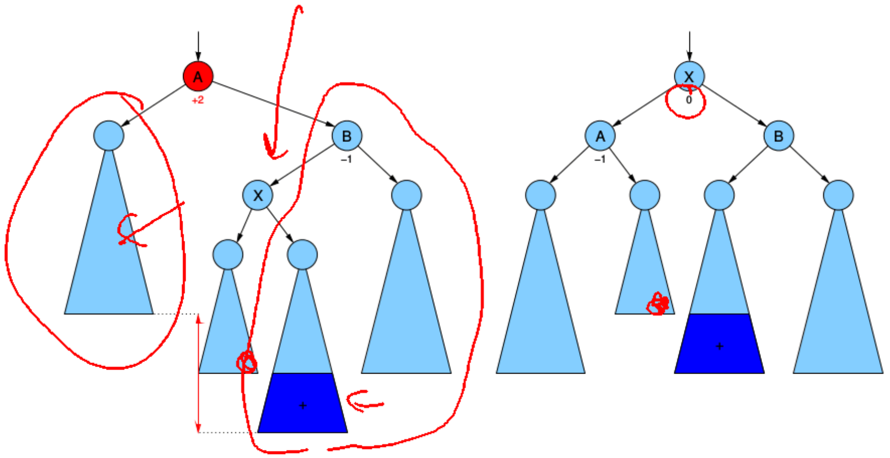
- Differenz 0: Wert war vorher ± 1, Höhe unverändert, also aufhören
- Differenz ± 1: Wert war vorher 0, Höhe ist jetzt um 1 größer, Höhendifferenz im Vaterknoten anpassen und dort weitermachen
- Differenz ± 2: Rebalancierung erforderlich, Einfach- oder Doppelrotation abhängig von Höhendifferenz an den Kindknoten

  danach Höhe wie zuvor, also aufhören

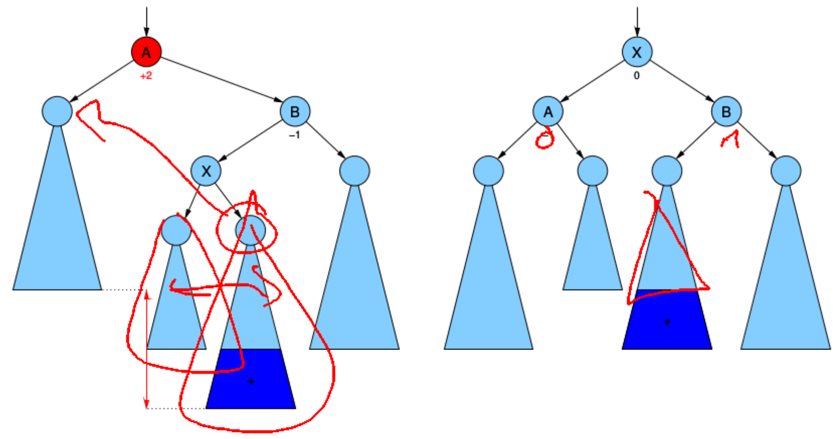
AVL-Bäume: Einfachrotation nach insert



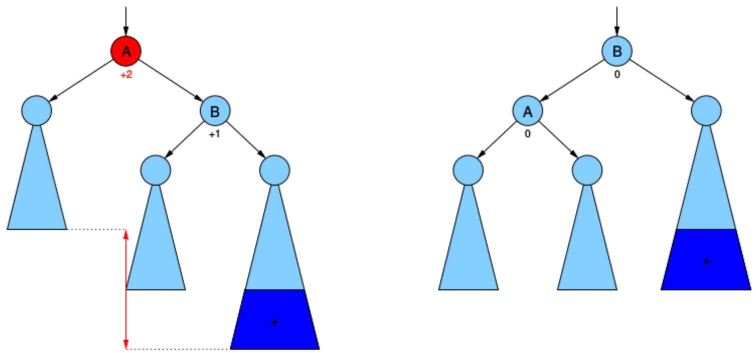
AVL-Bäume: Doppelrotation nach insert



AVL-Bäume: Doppelrotation nach insert



AVL-Bäume: Einfachrotation nach insert

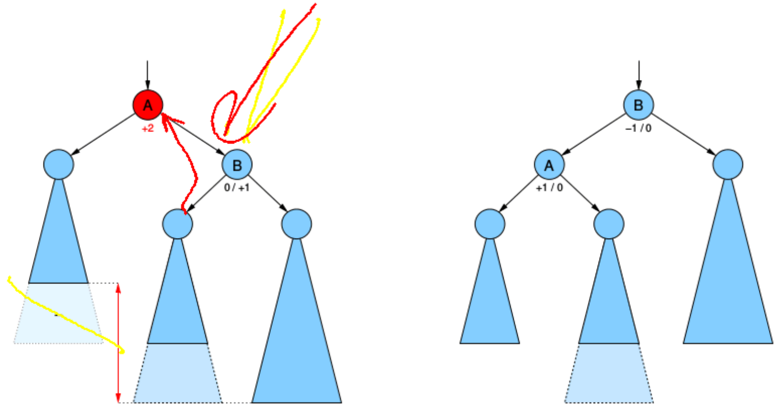


AVL-Bäume: remove

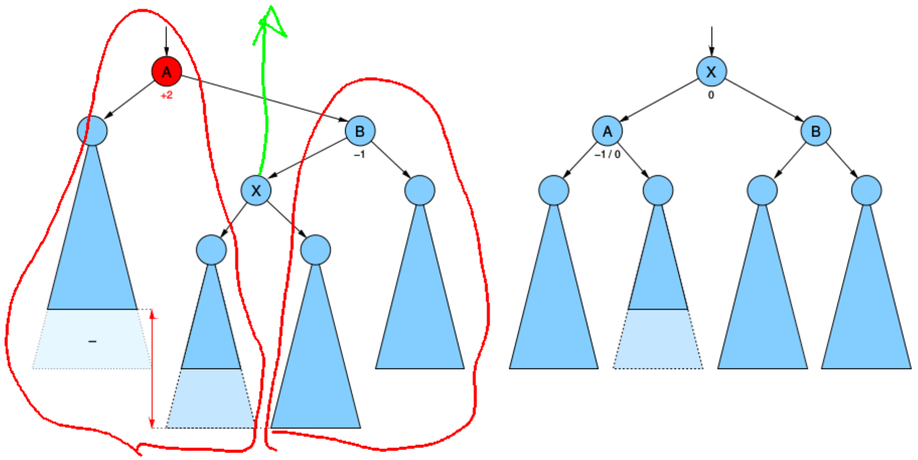
- Suche Knoten v, der entfernt werden soll
- Falls v ein Blatt ist oder genau 1 Kind hat, lösche v bzw. ersetze v durch sein Kind, aktualisiere Höhendifferenz des Vaterknotens und fahre dort fort.
- Falls v 2 Kinder hat, vertausche v mit dem rechtesten Knoten im linken Unterbaum (nächstkleineres Element direkt vor v) und lösche v dort.
  v hat dort höchstens 1 (linkes) Kind, nun wie im ersten Fall
- Differenz 0: Wert war vorher ± 1, Höhe ist jetzt um 1 kleiner, Höhendifferenz im Vaterknoten anpassen und dort weitermachen
- Differenz ± 1: Wert war vorher 0, Höhe unverändert, also aufhören
- Differenz ± 2: Rebalancierung erforderlich, Einfach- oder Doppelrotation abhängig von Höhendifferenz an den Kindknoten

  falls notwendig Höhendifferenz im Vaterknoten anpassen und dort weitermachen

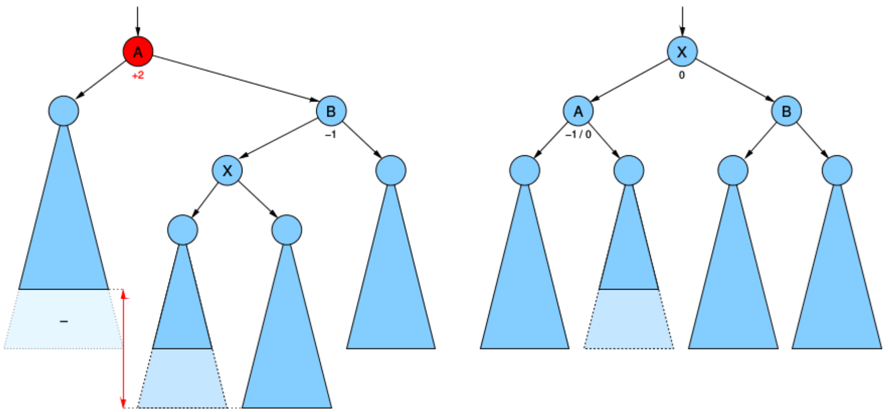
AVL-Bäume: Einfachrotation nach remove



AVL-Bäume: Doppelrotation nach remove



AVL-Bäume: Doppelrotation nach remove



Übersicht

8 Suchstrukturen
- Allgemeines
- Binäre Suchbäume
- AVL-Bäume
- (a, b)-Bäume

(a, b)-Baum

Andere Lösung für das Problem bei binären Suchbäumen, dass die Baumstruktur zur Liste entarten kann

Idee:

- $d(v)$: Ausgangsgrad (Anzahl Kinder) von Knoten v
- $t(v)$: Tiefe (in Kanten) von Knoten v
- Form-Invariante:
  alle Blätter in derselben Tiefe: $t(v) = t(w)$ für Blätter v, w
- Grad-Invariante:
  Für alle internen Knoten v (außer Wurzel) gilt:

$$a \le d(v) \le b \qquad \text{(wobei } a \ge 2 \text{ und } b \ge 2a - 1\text{)}$$

Für Wurzel r: $2 \le d(r) \le b$ (außer wenn nur 1 Blatt im Baum)

Suchstrukturen (a, b)-Bäume

(a, b)-Baum

Andere Lösung für das Problem bei binären Suchbäumen, dass die Baumstruktur zur Liste entarten kann

Idee:

- $d(v)$: Ausgangsgrad (Anzahl Kinder) von Knoten v
- $t(v)$: Tiefe (in Kanten) von Knoten v
- Form-Invariante:
  alle Blätter in derselben Tiefe: $t(v) = t(w)$ für Blätter v, w
- Grad-Invariante:
  Für alle internen Knoten v (außer Wurzel) gilt:

$$a \le d(v) \le b \qquad \text{(wobei } a \ge 2 \text{ und } b \ge 2a - 1\text{)}$$

Für Wurzel r: $2 \le d(r) \le b$ (außer wenn nur 1 Blatt im Baum)

H. Seidl (TUM) GAD SS'15 341

(a, b)-Baum

Lemma

Ein (a, b)-Baum für $n \ge 1$ Elemente hat Tiefe $\le 1 + \left\lfloor \log_a \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

Beweis.

- Baum hat $n + 1$ Blätter ($+1$ wegen ∞-Dummy)
- Im Fall $n \ge 1$ hat die Wurzel Grad ≥ 2, die anderen inneren Knoten haben Grad $\ge a$.

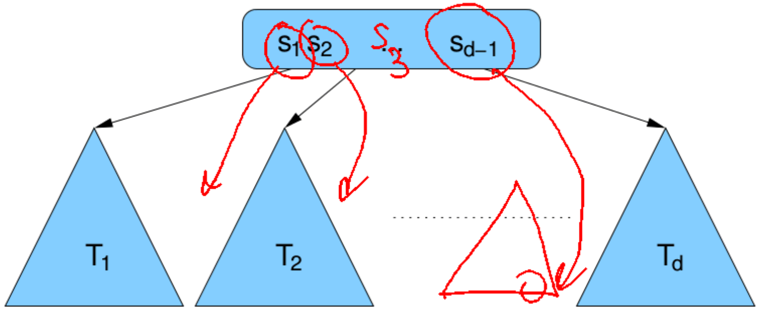
$\Rightarrow$ Bei Tiefe t gibt es $\ge 2a^{t-1}$ Blätter

- $n + 1 \ge 2a^{t-1} \quad \Leftrightarrow \quad t \le 1 + \log_a \frac{n+1}{2}$
- Da t eine ganze Zahl ist, gilt $t \le 1 + \left\lfloor \log_a \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

□

(a, b)-Baum: Split-Schlüssel

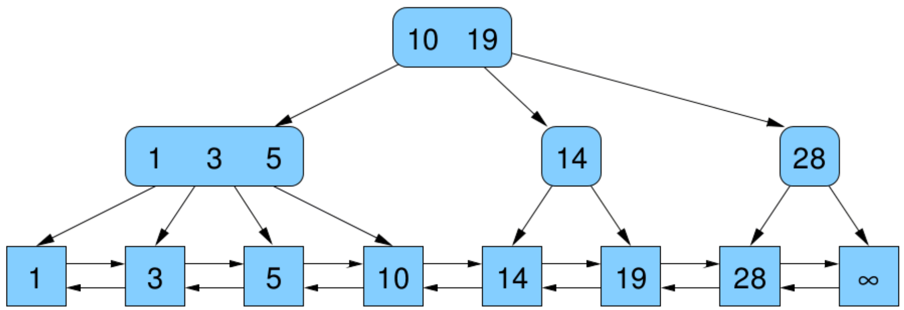
- Jeder Knoten v enthält ein sortiertes Array von $d(v) - 1$ Split-Schlüsseln $s_1, \ldots, s_{d(v)-1}$



- (a, b)-Suchbaum-Regel:
  Für alle Schlüssel k in T_i und k' in T_{i+1} gilt:
  $k \le s_i < k'$ bzw. $s_{i-1} < k \le s_i$ $\qquad (s_0 = -\infty,\ s_d = \infty)$

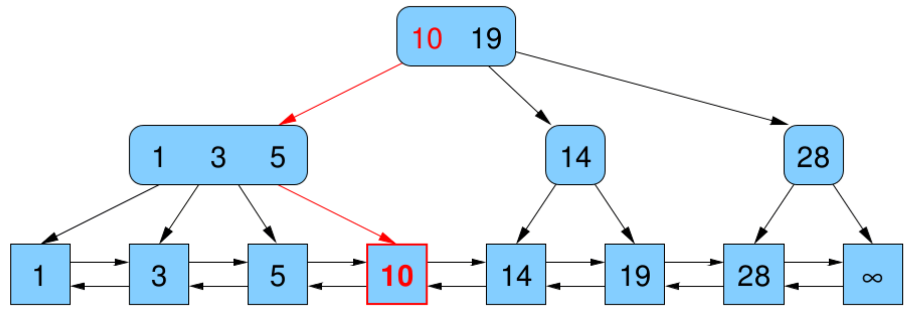
(a, b)-Baum

Beispiel: $(2, 4)$-Baum



(a, b)-Baum

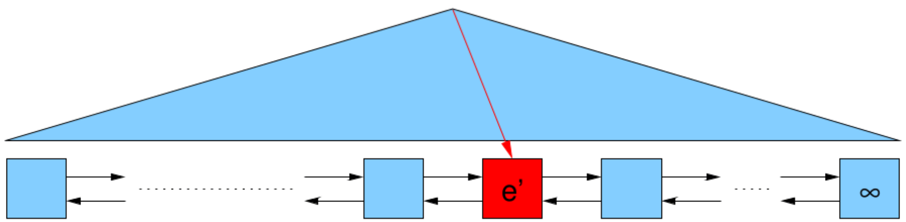
locate(9)



(a, b)-Baum

insert(e)

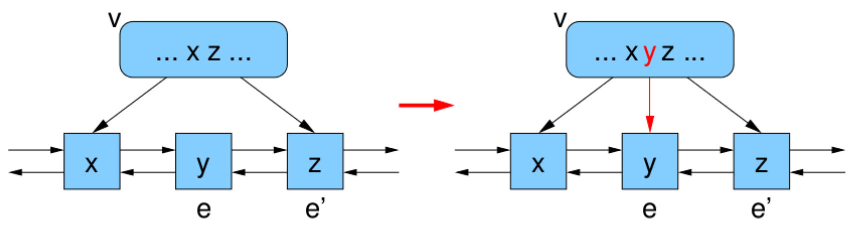
- Abstieg wie bei locate(key(e)) bis Element e' in Liste erreicht
- falls key(e)<key(e'), füge e vor e' ein



(a, b)-Baum

insert(e)

- füge key(e) und Handle auf e in Baumknoten v über e ein
- falls $d(v) \leq b$, dann fertig



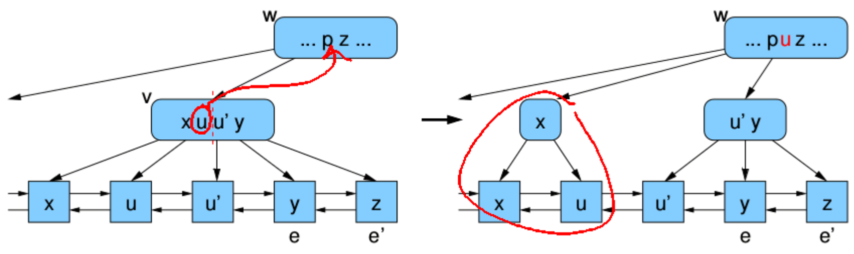
(a, b)-Baum

$b \geq 2a - 1$

insert(e)

- füge key(e) und Handle auf e in Baumknoten v über e ein
- falls $d(v) > b$, dann teile v in zwei Knoten auf und
- verschiebe den Splitter (größter Key im linken Teil) in den Vaterknoten

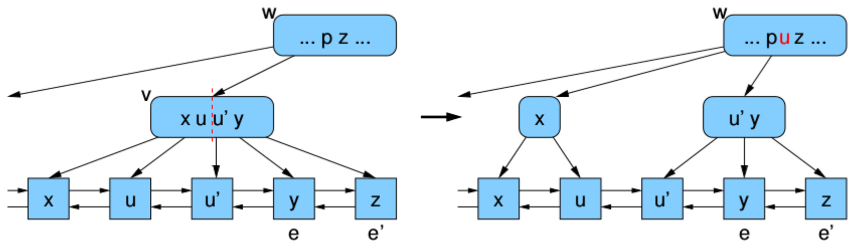
Beispiel: $(2, 4)$-Baum



(a, b)-Baum

insert(e)

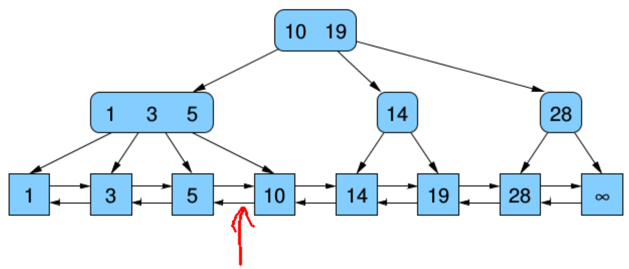
- falls $d(w) > b$, dann teile w in zwei Knoten auf usw.
  bis Grad $\leq b$
  oder Wurzel aufgeteilt wurde



(a, b)-Baum / insert

$a = 2$, $b = 4$

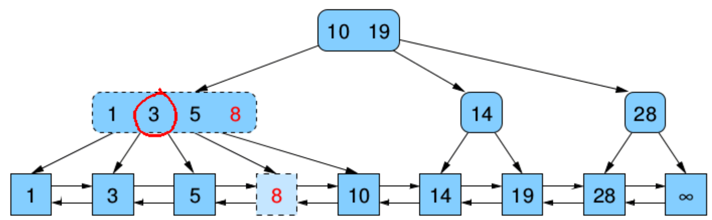
insert(8)



(a, b)-Baum / insert

$a = 2$, $b = 4$

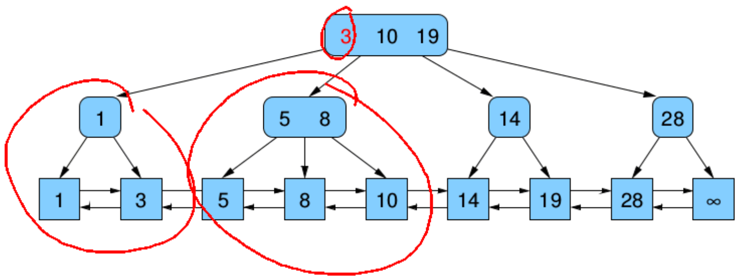
insert(8)



(a, b)-Baum / insert

$a = 2,\ b = 4$

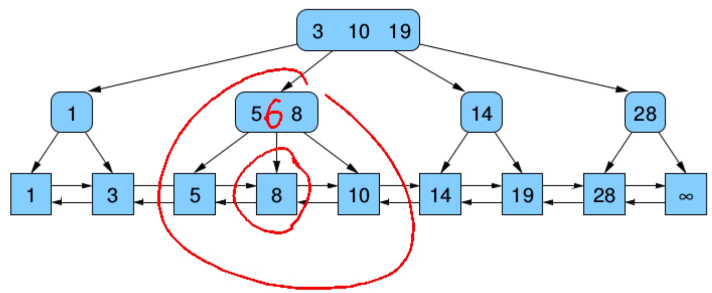
insert(8)



(a, b)-Baum / insert

$a = 2,\ b = 4$

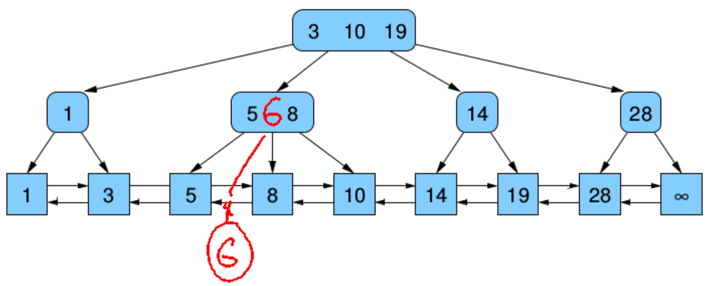
insert(6)



(a, b)-Baum / insert

$a = 2,\ b = 4$

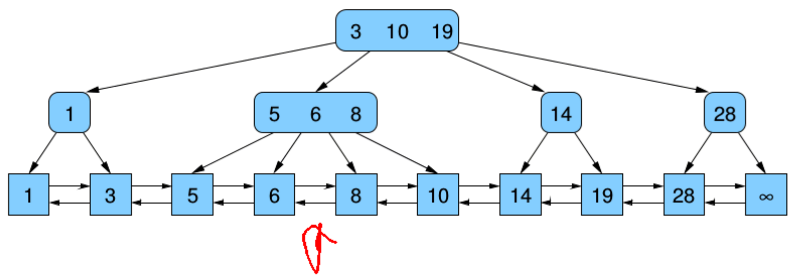
insert(6)



(a, b)-Baum / insert

$a = 2,\ b = 4$

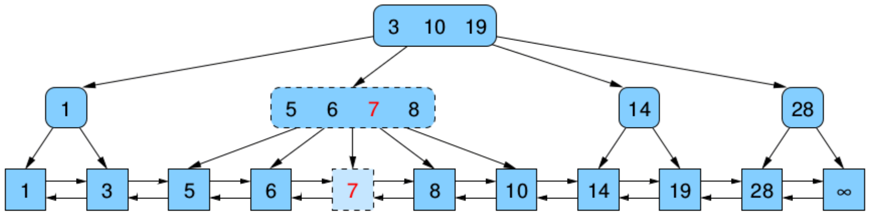
insert(7)



(a, b)-Baum / insert

$a = 2$, $b = 4$

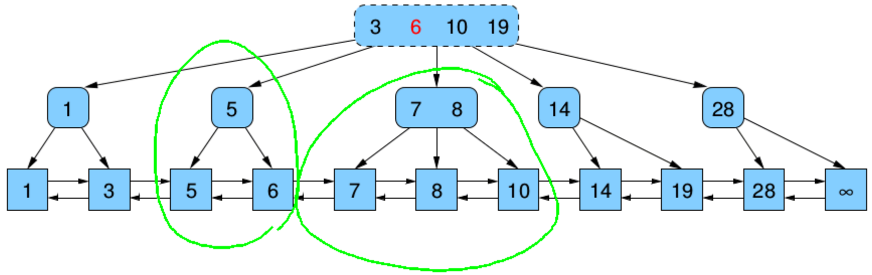
insert(7)



(a, b)-Baum / insert

$a = 2$, $b = 4$

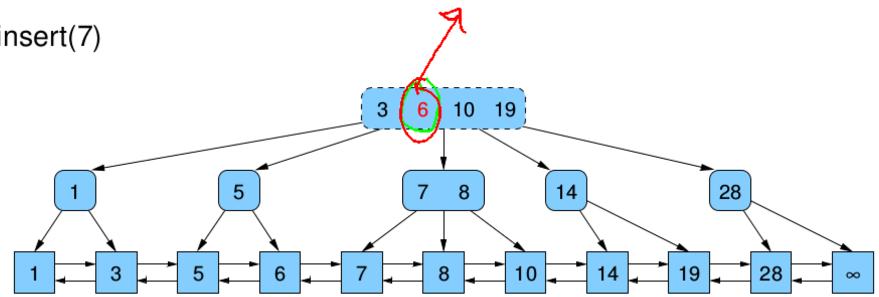
insert(7)



(a, b)-Baum / insert

$a = 2$, $b = 4$

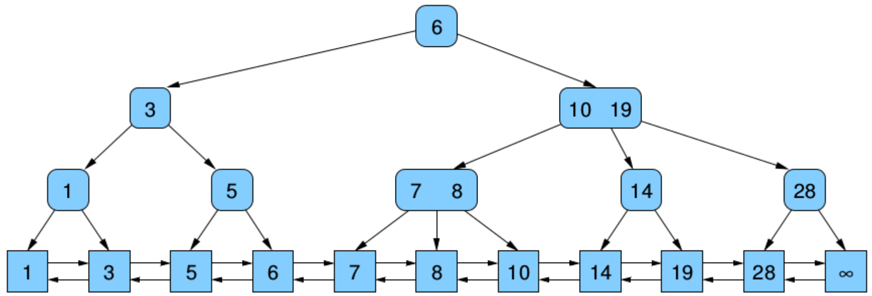
insert(7)



(a, b)-Baum / insert

$a = 2$, $b = 4$

insert(7)



(a, b)-Baum / insert

Form-Invariante

- alle Blätter haben dieselbe Tiefe, denn
  neues Blatt wird auf der Ebene der anderen eingefügt und
  im Fall einer neuen Wurzel erhöht sich die Tiefe aller Blätter um 1

Grad-Invariante

- insert splittet Knoten mit Grad $b + 1$ in zwei Knoten
  mit Grad $\lfloor (b + 1)/2 \rfloor$ und $\lceil (b + 1)/2 \rceil$
- wenn $b \geq 2a - 1$, dann sind beide Werte $\geq a$
- wenn Wurzel Grad $b + 1$ erreicht und gespalten wird,
  wird neue Wurzel mit Grad 2 erzeugt