Script generated by TTT

Title: Täubig: GAD (17.06.2014)

Date: Tue Jun 17 13:54:52 CEST 2014

Duration: 107:56 min

Pages: 69

Übersicht

(a,b)-Baum

Andere Lösung für das Problem bei binären Suchbäumen, dass die Baumstruktur zur Liste entarten kann

Idee:

- $d(v)$: Ausgangsgrad (Anzahl Kinder) von Knoten v
- $t(v)$: Tiefe (in Kanten) von Knoten v
- Form-Invariante:
  alle Blätter in derselben Tiefe: $t(v) = t(w)$ für Blätter v, w
- Grad-Invariante:
  Für alle internen Knoten v (außer Wurzel) gilt:

$$a \le d(v) \le b \qquad \text{(wobei } a \ge 2 \text{ und } b \ge 2a-1\text{)}$$

Für Wurzel r: $2 \le d(r) \le b$ (außer wenn nur 1 Blatt im Baum)

(a,b)-Baum

Lemma

Ein (a,b)-Baum für $n \ge 1$ Elemente hat Tiefe $\le 1 + \lfloor \log_a \frac{n+1}{2} \rfloor$.

Beweis.

- Baum hat $n+1$ Blätter (+1 wegen ∞-Dummy)
- Im Fall $n \ge 1$ hat die Wurzel Grad ≥ 2,
  die anderen inneren Knoten haben Grad $\ge a$.

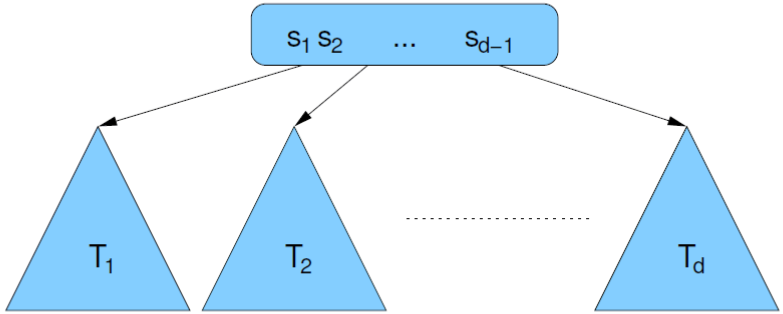
$\Rightarrow$ Bei Tiefe t gibt es $\ge 2a^{t-1}$ Blätter

- $n+1 \ge 2a^{t-1} \quad \Leftrightarrow \quad t \le 1 + \log_a \frac{n+1}{2}$
- Da t eine ganze Zahl ist, gilt $t \le 1 + \lfloor \log_a \frac{n+1}{2} \rfloor$.

□

(a,b)-Baum: Split-Schlüssel

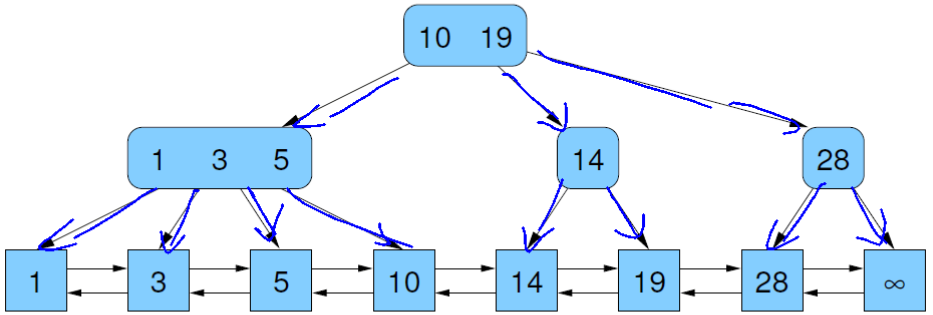
- Jeder Knoten v enthält ein sortiertes Array von $d(v) - 1$ Split-Schlüsseln $s_1, \ldots, s_{d(v)-1}$



- (a,b)-Suchbaum-Regel:
  Für alle Schlüssel k in T_i und k' in T_{i+1} gilt:
  $k \leq s_i < k'$ bzw. $s_{i-1} < k \leq s_i$ $\quad (s_0 = -\infty, s_d = \infty)$

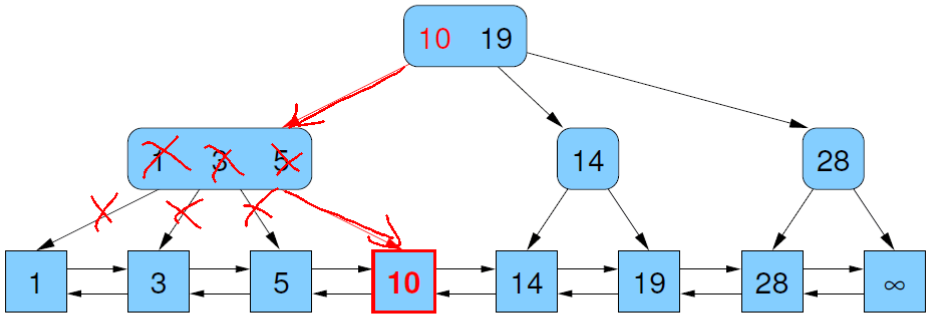
(a,b)-Baum

Beispiel: (2,4)-Baum



(a,b)-Baum

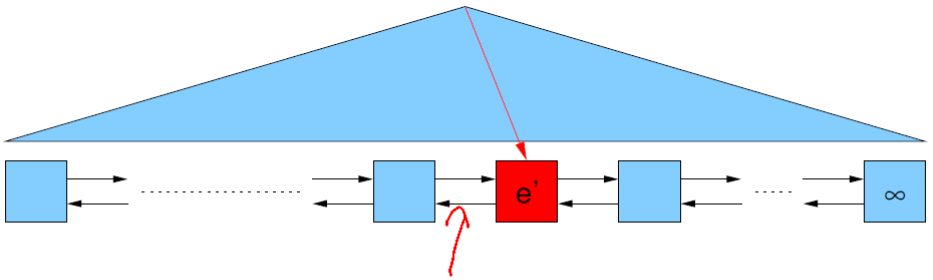
locate(9)



(a,b)-Baum

insert(e)

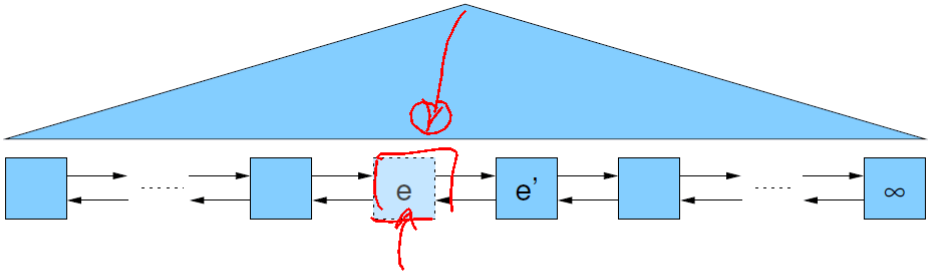
- Abstieg wie bei locate(key(e)) bis Element e' in Liste erreicht
- falls key(e)<key(e'), füge e vor e' ein



(a, b)-Baum

insert(e)

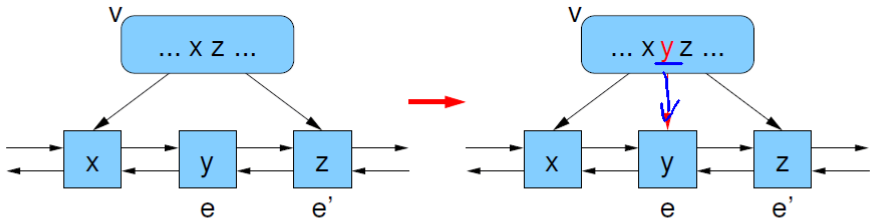
- Abstieg wie bei locate(key(e)) bis Element e′ in Liste erreicht
- falls key(e)<key(e′), füge e vor e′ ein



(a, b)-Baum

insert(e)

- füge key(e) und Handle auf e in Baumknoten v über e ein
- falls $d(v) \leq b$, dann fertig

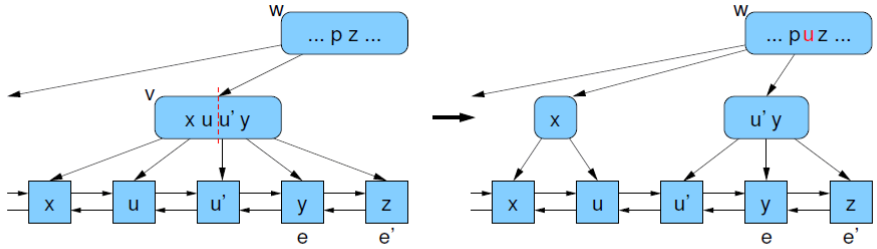


(a, b)-Baum

insert(e)

- füge key(e) und Handle auf e in Baumknoten v über e ein
- falls $d(v) > b$, dann teile v in zwei Knoten auf und
- verschiebe den Splitter (größter Key im linken Teil) in den Vaterknoten

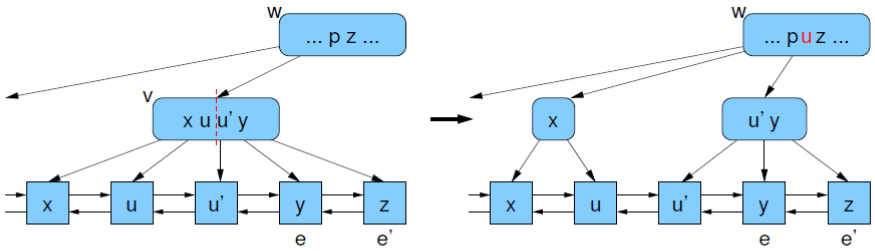
Beispiel: (2, 4)-Baum



(a, b)-Baum

insert(e)

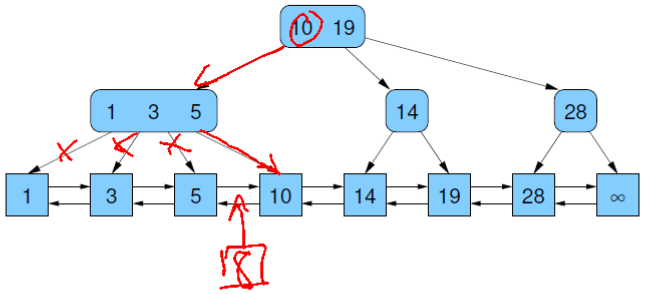
- falls $d(w) > b$, dann teile w in zwei Knoten auf usw.
  bis Grad $\leq b$
  oder Wurzel aufgeteilt wurde



(a,b)-Baum / insert

$a = 2, b = 4$

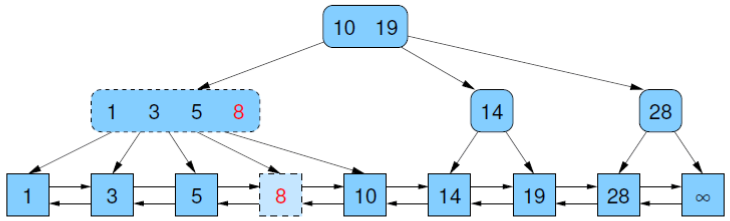
insert(8)



(a,b)-Baum / insert

$a = 2, b = 4$

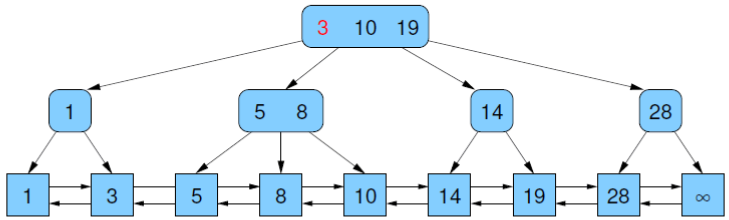
insert(8)



(a,b)-Baum / insert

$a = 2, b = 4$

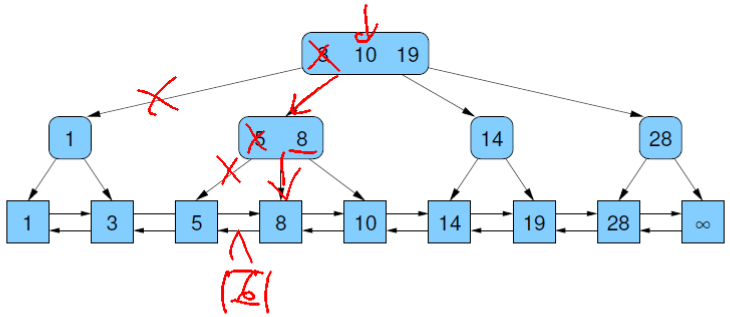
insert(8)



(a,b)-Baum / insert

$a = 2, b = 4$

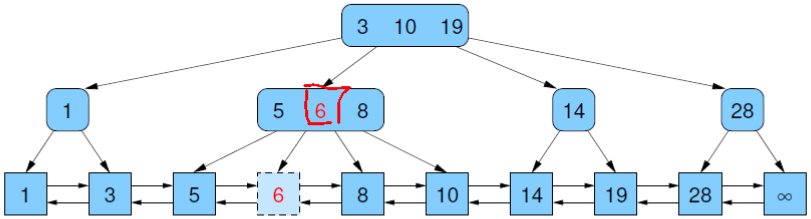
insert(6)



(a,b)-Baum / insert

$a = 2, b = 4$

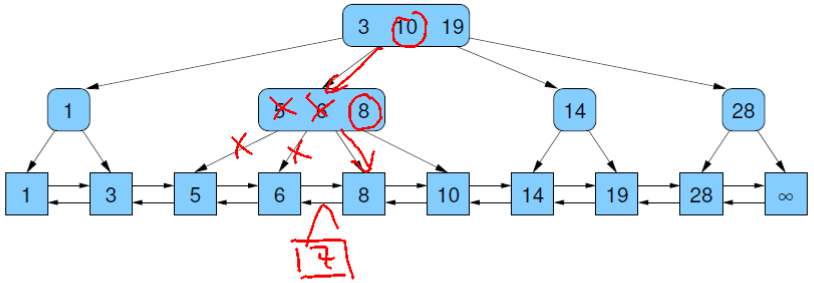
insert(6)



(a,b)-Baum / insert

$a = 2, b = 4$

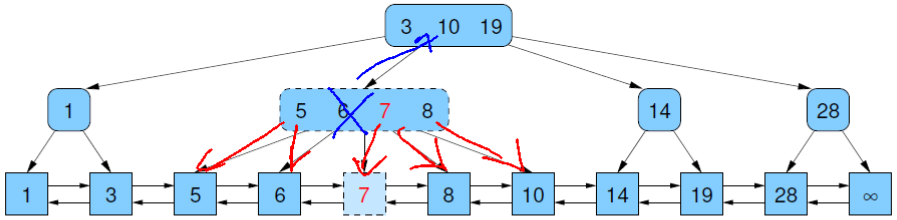
insert(7)



(a,b)-Baum / insert

$a = 2, b = 4$

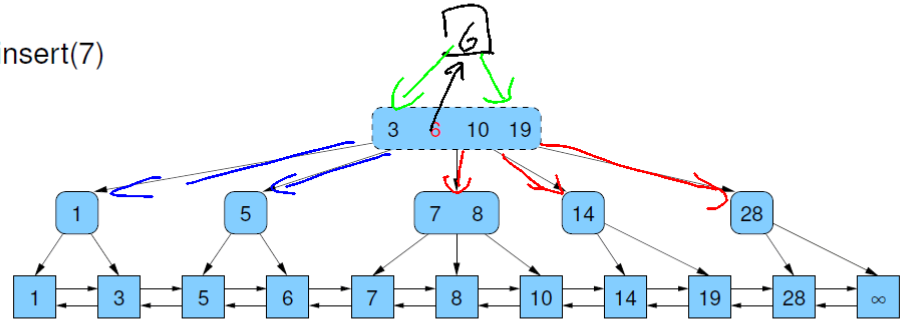
insert(7)



(a,b)-Baum / insert

$a = 2, b = 4$

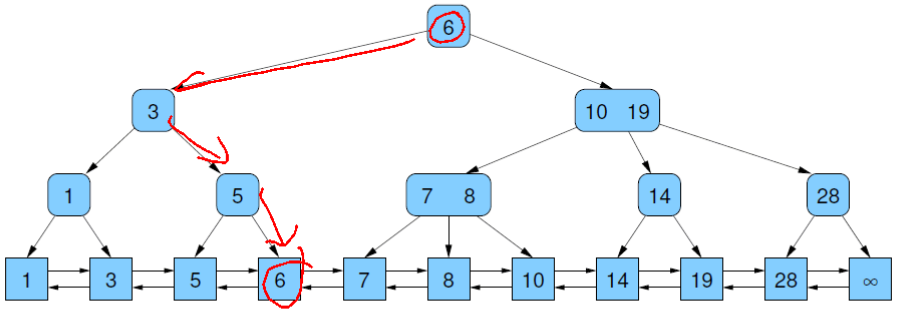
insert(7)



(a,b)-Baum / insert

$a = 2, b = 4$

insert(7)



(a,b)-Baum / insert

Form-Invariante

- alle Blätter haben dieselbe Tiefe, denn
  neues Blatt wird auf der Ebene der anderen eingefügt und
  im Fall einer neuen Wurzel erhöht sich die Tiefe aller Blätter um 1

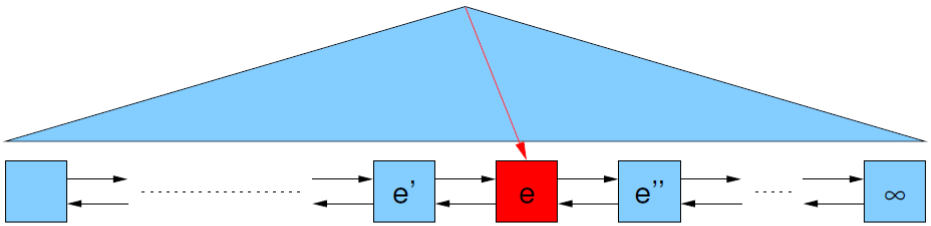
Grad-Invariante

- insert splittet Knoten mit Grad $b + 1$ in zwei Knoten
  mit Grad $\lfloor (b+1)/2 \rfloor$ und $\lceil (b+1)/2 \rceil$
- wenn $b \geq 2a - 1$, dann sind beide Werte $\geq a$
- wenn Wurzel Grad $b + 1$ erreicht und gespalten wird,
  wird neue Wurzel mit Grad 2 erzeugt

(a,b)-Baum

remove(k)

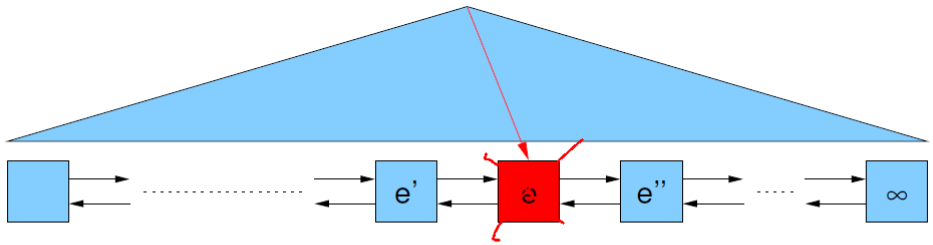
- Abstieg wie bei locate(k) bis Element e in Liste erreicht
- falls key(e) $= k$, entferne e aus Liste (sonst return)



(a,b)-Baum

remove(k)

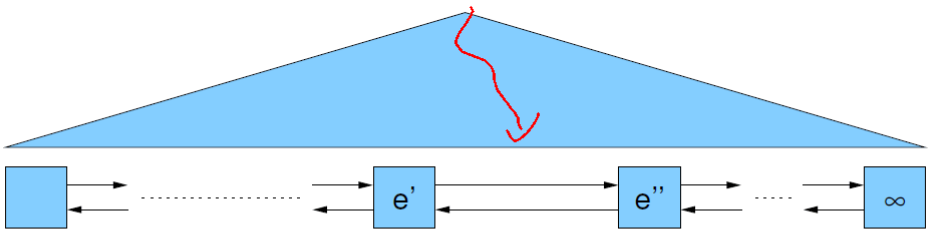
- Abstieg wie bei locate(k) bis Element e in Liste erreicht
- falls key(e) $= k$, entferne e aus Liste (sonst return)



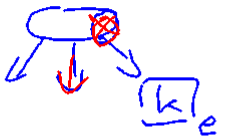
(a,b)-Baum

remove(k)

- Abstieg wie bei locate(k) bis Element e in Liste erreicht
- falls key(e) $= k$, entferne e aus Liste (sonst return)

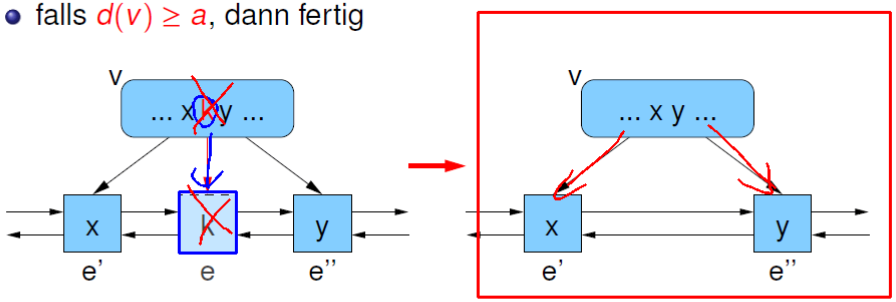


(a,b)-Baum



remove(k)

- entferne Handle auf e und Schlüssel k vom Baumknoten v über e (wenn e rechtestes Kind: Schlüsselvertauschung wie bei binärem Suchbaum)
- falls $d(v) \geq a$, dann fertig

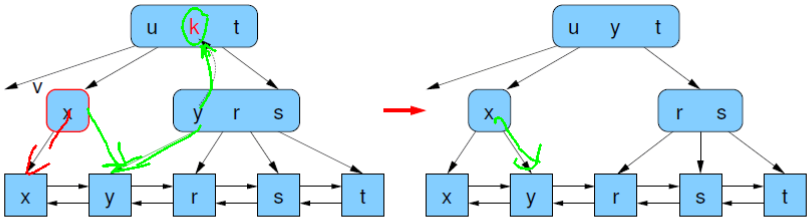


(a,b)-Baum

remove(k)

- falls $d(v) < a$ und ein direkter Nachbar v' von v hat Grad $> a$, nimm Kante von v'

Beispiel: $(2,4)$-Baum

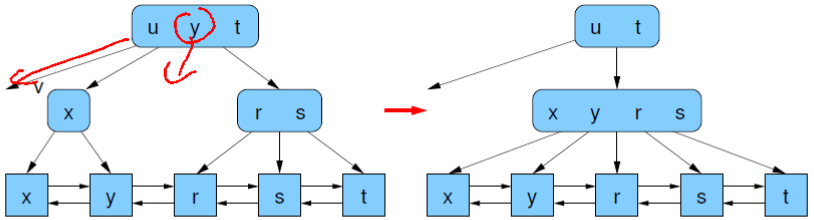


(a,b)-Baum

remove(k)

- falls $d(v) < a$ und kein direkter Nachbar von v hat Grad $> a$, merge v mit Nachbarn

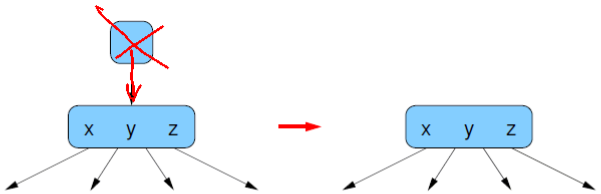
Beispiel: $(3,5)$-Baum



(a,b)-Baum

remove(k)

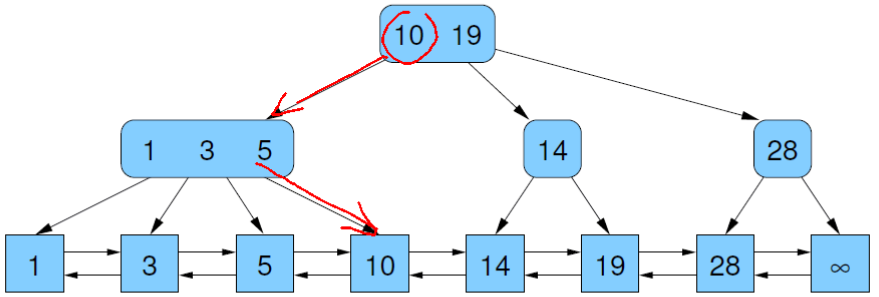
- Verschmelzungen können sich nach oben fortsetzen, ggf. bis zur Wurzel
- falls Grad der Wurzel < 2: entferne Wurzel
  neue Wurzel wird das einzige Kind der alten Wurzel



(a,b)-Baum / remove

$a = 2, b = 4$

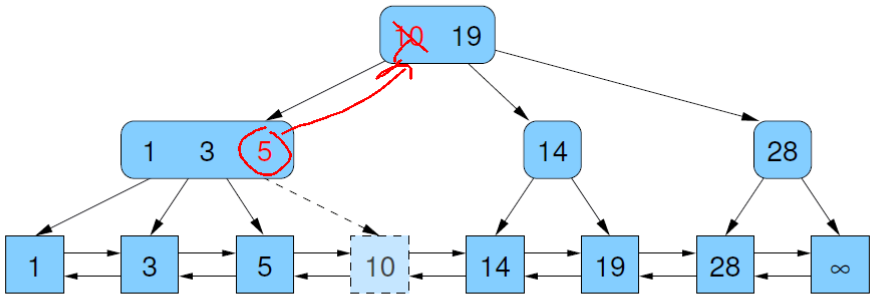
remove(10)



(a,b)-Baum / remove

$a = 2, b = 4$

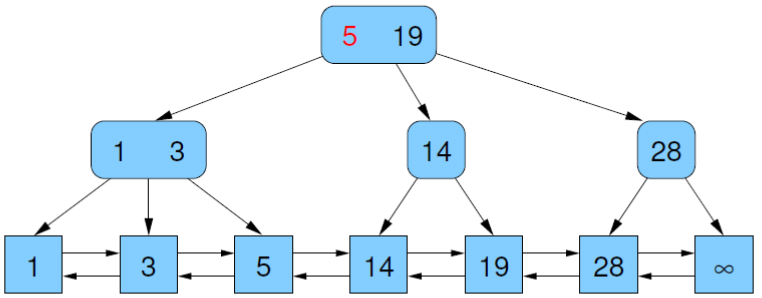
remove(10)



(a,b)-Baum / remove

$a = 2, b = 4$

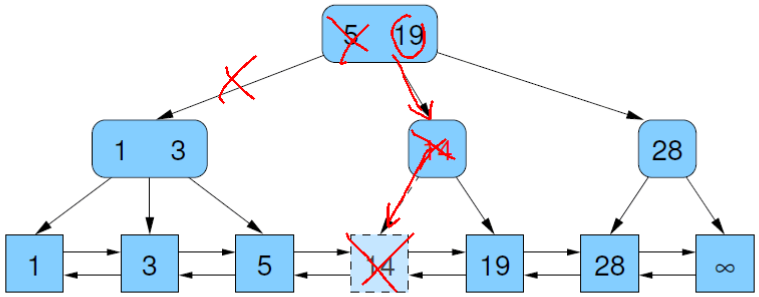
remove(10)



(a,b)-Baum / remove

$a = 2, b = 4$

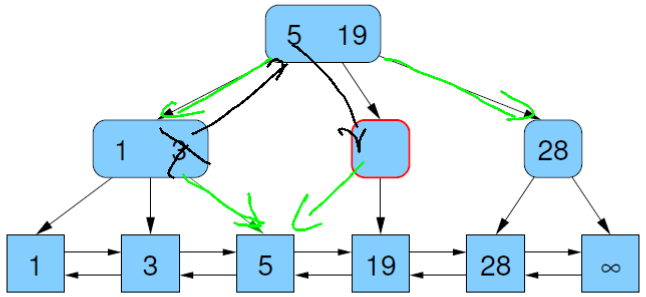
remove(14)



(a,b)-Baum / remove

$a = 2, b = 4$

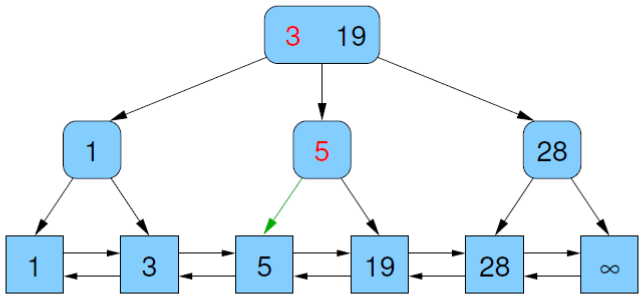
remove(14)



(a,b)-Baum / remove

$a = 2, b = 4$

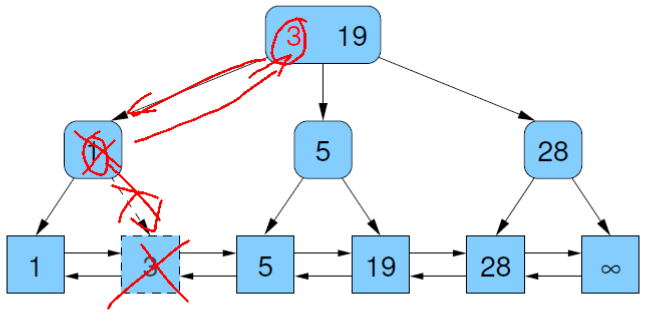
remove(14)



(a,b)-Baum / remove

$a = 2, b = 4$

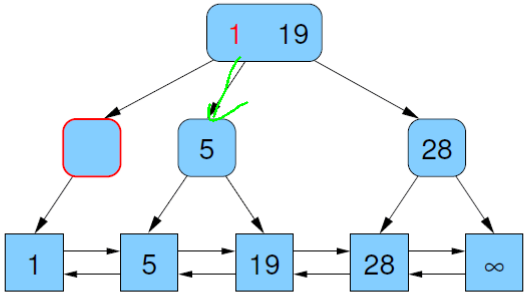
remove(3)



(a,b)-Baum / remove

$a = 2, b = 4$

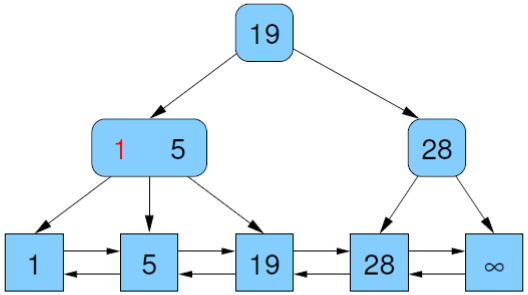
remove(3)



(a,b)-Baum / remove

$a = 2, b = 4$

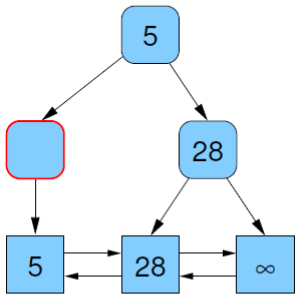
remove(3)



(a,b)-Baum / remove

$a = 2, b = 4$

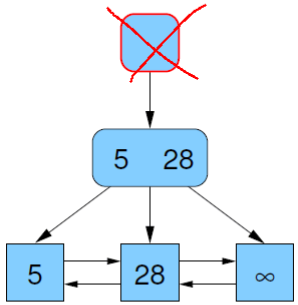
remove(19)



(a,b)-Baum / remove

$a = 2, b = 4$

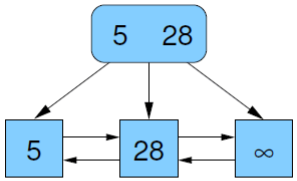
remove(19)



(a,b)-Baum / remove

$a = 2, b = 4$

remove(19)



(a,b)-Baum / remove

Form-Invariante

- alle Blätter behalten dieselbe Tiefe
- falls alte Wurzel entfernt wird, verringert sich die Tiefe aller Blätter

Grad-Invariante

- remove verschmilzt Knoten, die Grad $a-1$ und a haben
- wenn $b \geq 2a-1$, dann ist der resultierende Grad $\leq b$
- remove verschiebt eine Kante von Knoten mit Grad $> a$ zu Knoten mit Grad $a-1$, danach sind beide Grade in $[a,b]$
- wenn Wurzel gelöscht, wurden vorher die Kinder verschmolzen, Grad vom letzten Kind ist also $\geq a$ (und $\leq b$)

Weitere Operationen im (a,b)-Baum

- min / max-Operation

  verwende first / last-Methode der Liste, um das kleinste bzw. größte Element auszugeben

  Zeit: $O(1)$

- Range queries (Bereichsanfragen)

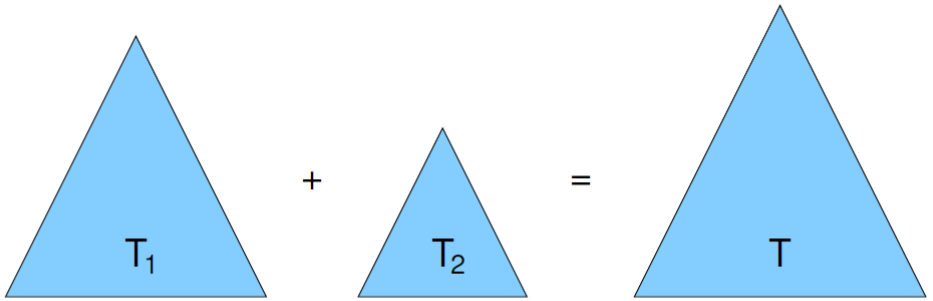
  suche alle Elemente im Bereich $[x,y]$:
  - führe locate(x) aus und
  - durchlaufe die Liste, bis Element $> y$ gefunden wird

  Zeit: $O(\log n + \text{Ausgabegröße})$

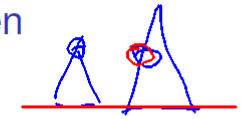
- Konkatenation / Splitting

Konkatenation von (a,b)-Bäumen

- verknüpfe zwei (a,b)-Bäume T_1 und T_2 mit s_1 bzw. s_2 Elementen und Höhe h_1 bzw. h_2 zu (a,b)-Baum T
- Bedingung: Schlüssel in $T_1 \leq$ Schlüssel in T_2



Konkatenation von (a, b)-Bäumen



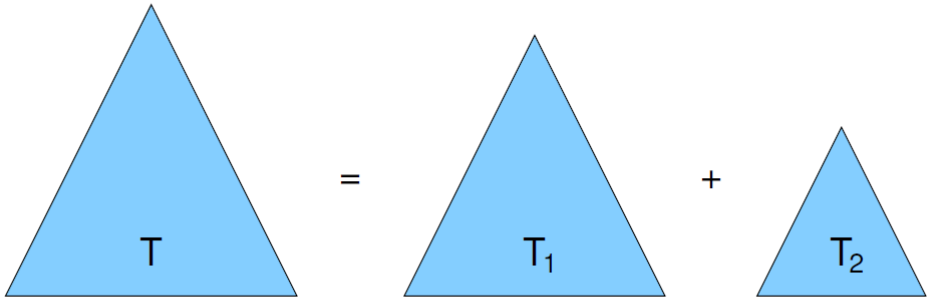
- lösche in T_1 das ∞-Dummy-Element
- wenn danach dessen Vater-Knoten $< a$ Kinder hat, dann behandle dies wie bei remove
- verschmelze die Wurzel des niedrigeren Baums mit dem entsprechenden äußersten Knoten des anderen Baums, der sich auf dem gleichen Level befindet
- wenn dieser Knoten danach $> b$ Kinder hat, dann behandle dies wie bei insert

$\Rightarrow$ falls Höhe der Bäume explizit gespeichert: Zeit $O(1 + |h_1 - h_2|)$

ansonsten (mit Höhenbestimmung): Zeit $O(1 + \max\{h_1, h_2\})$
$\subseteq O(1 + \log(\max\{s_1, s_2\}))$

Aufspaltung eines (a, b)-Baums

- spalte (a, b)-Baum T bei Schlüssel k in zwei (a, b)-Bäume T_1 und T_2 auf



Aufspaltung eines (a, b)-Baums

- Sequenz $q = \langle w, \ldots, x, y, \ldots, z \rangle$ soll bei Schlüssel y in Teile $q_1 = \langle w, \ldots, x \rangle$ und $q_2 = \langle y, \ldots, z \rangle$ aufgespalten werden

Aufspaltung eines (a, b)-Baums

- Sequenz $q = \langle w, \ldots, x, y, \ldots, z \rangle$ soll bei Schlüssel y in Teile $q_1 = \langle w, \ldots, x \rangle$ und $q_2 = \langle y, \ldots, z \rangle$ aufgespalten werden
- betrachte Pfad von Wurzel zum Blatt y
- spalte auf diesem Pfad jeden Knoten v in zwei Knoten v_ℓ und v_r
- v_ℓ bekommt Kinder links vom Pfad, v_r bekommt Kinder rechts vom Pfad (evt. gibt es Knoten ohne Kinder)

Aufspaltung eines (a,b)-Baums

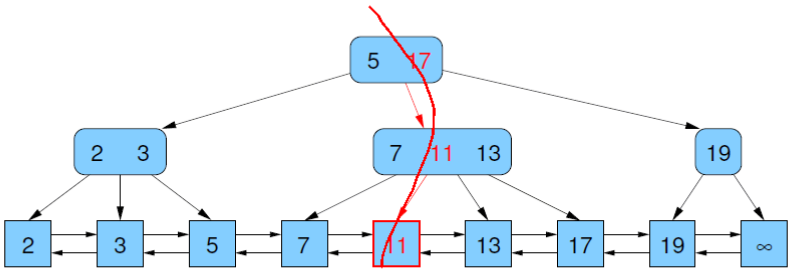
- Sequenz $q = \langle w, \ldots, x, y, \ldots, z \rangle$ soll bei Schlüssel y in Teile $q_1 = \langle w, \ldots, x \rangle$ und $q_2 = \langle y, \ldots, z \rangle$ aufgespalten werden
- betrachte Pfad von Wurzel zum Blatt y
- spalte auf diesem Pfad jeden Knoten v in zwei Knoten v_ℓ und v_r
- v_ℓ bekommt Kinder links vom Pfad,
  v_r bekommt Kinder rechts vom Pfad
  (evt. gibt es Knoten ohne Kinder)
- Knoten mit Kind(ern) werden als Wurzeln von (a,b)-Bäumen interpretiert
- Konkatenation der linken Bäume zusammen mit einem neuen ∞-Dummy ergibt einen Baum für die Elemente bis x
- Konkatenation von $\langle y \rangle$ zusammen mit den rechten Bäumen ergibt einen Baum für die Elemente ab y

Aufspaltung eines (a,b)-Baums

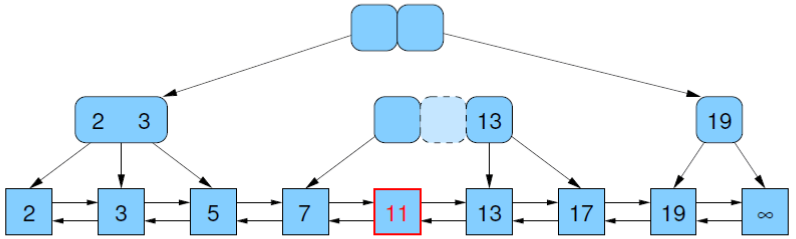
- diese $O(\log n)$ Konkatenationen können in Gesamtzeit $O(\log n)$ erledigt werden
- Grund: die linken Bäume haben echt monoton fallende, die rechten echt monoton wachsende Höhe
- Seien z.B. $r_1, r_2, \ldots, r_k$ die Wurzeln der linken Bäume und $h_1 > h_2 > \ldots > h_k$ deren Höhen
- verbinde zuerst r_{k-1} und r_k in Zeit $O(1 + h_{k-1} - h_k)$,
  dann r_{k-2} mit dem Ergebnis in Zeit $O(1 + h_{k-2} - h_{k-1})$,
  dann r_{k-3} mit dem Ergebnis in Zeit $O(1 + h_{k-3} - h_{k-2})$ usw.
- Gesamtzeit:

$$O\left(\sum_{1 \le i < k} (1 + h_i - h_{i+1})\right) = O(k + h_1 - h_k) \in O(\log n)$$

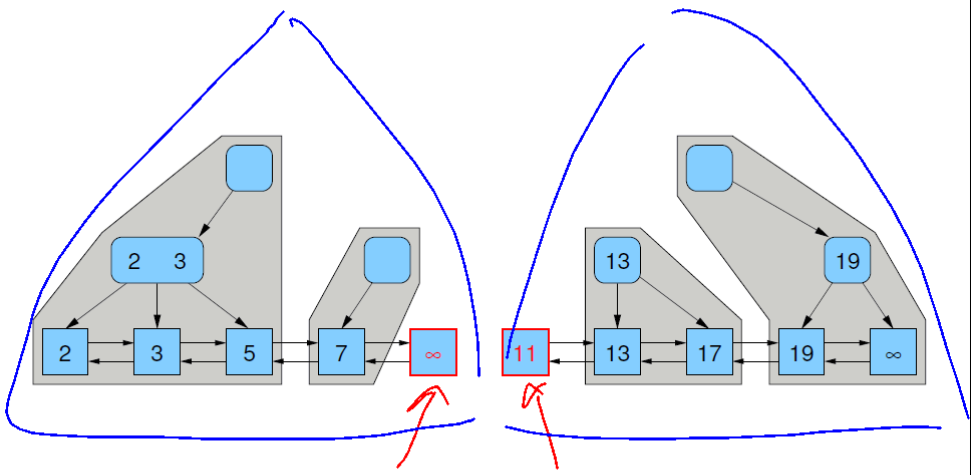
Aufspaltung eines (a,b)-Baums



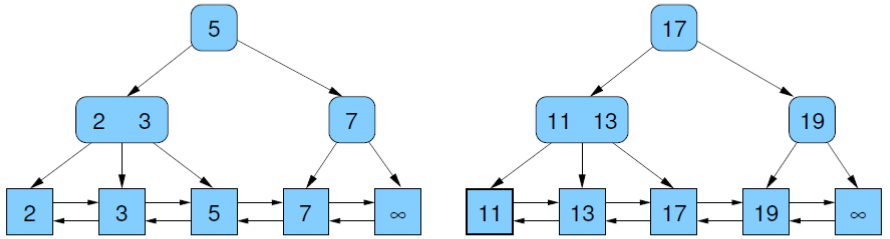
Aufspaltung eines (a,b)-Baums



Aufspaltung eines (a,b)-Baums



Aufspaltung eines (a,b)-Baums



Effizienz von insert / remove-Folgen

Satz

Es gibt eine Folge von n insert- und remove-Operationen auf einem anfangs leeren $(2,3)$-Baum, so dass die Gesamtanzahl der Knotenaufspaltungen und -verschmelzungen in $\Omega(n \log n)$ ist.

Beweis: siehe Übung

Effizienz von insert / remove-Folgen

$b \geq 2a-1$

Satz

Für (a,b)-Bäume, die die erweiterte Bedingung $b \geq 2a$ erfüllen, gilt:

Für jede Folge von n insert- und remove-Operationen auf einem anfangs leeren (a,b)-Baum ist die Gesamtanzahl der Knotenaufspaltungen und -verschmelzungen in $O(n)$.

Beweis: amortisierte Analyse, nicht in dieser Vorlesung

Übersicht

Graphen

Übersicht

9 Graphen
- Netzwerke und Graphen
- Graphrepräsentation
- Graphtraversierung
- Kürzeste Wege
- Minimale Spannbäume

H. Täubig (TUM) GAD SS'14 396

Netzwerk

Objekt bestehend aus
- Elementen und
- Interaktionen bzw. Verbindungen zwischen den Elementen

eher *informales* Konzept
- keine exakte Definition
- Elemente und ihre Verbindungen können ganz unterschiedlichen Charakter haben
- manchmal manifestiert in real existierenden Dingen, manchmal nur gedacht (virtuell)

Beispiele für Netzwerke

- Kommunikationsnetze: Internet, Telefonnetz
- Verkehrsnetze: Straßen-, Schienen-, Flug-, Nahverkehrsnetz
- Versorgungsnetzwerke: Strom, Wasser, Gas, Erdöl
- wirtschaftliche Netzwerke: Geld- und Warenströme, Handel
- biochemische Netzwerke: Metabolische und Interaktionsnetzwerke
- biologische Netzwerke: Gehirn, Ökosysteme
- soziale / berufliche Netzwerke: virtuell oder explizit (Communities)
- Publikationsnetzwerke: Zitationsnetzwerk, Koautor-Netzwerk

Graph

formales / abstraktes Objekt bestehend aus

- Menge von Knoten V (engl. vertices, nodes)
- Menge von Kanten E (engl. edges, lines, links), die jeweils ein Paar von Knoten verbinden
- Menge von Eigenschaften der Knoten und / oder Kanten

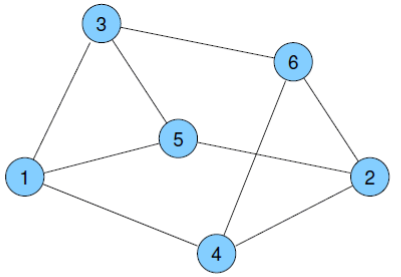
Notation:

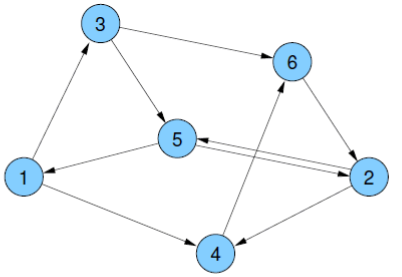
- $G = (V, E)$
  manchmal auch $G = (V, E, w)$ im Fall gewichteter Graphen
- Anzahl der Knoten: $n = |V|$
  Anzahl der Kanten: $m = |E|$

Gerichtete und ungerichtete Graphen

Kanten bzw. Graphen

- ungerichtet: $E \subseteq \{\{v, w\} : v \in V, w \in V\}$
  (ungeordnetes Paar von Knoten bzw. 2-elementige Teilmenge)
- gerichtet: $E \subseteq \{(v, w) : v \in V, w \in V\}$, also $E \subseteq V \times V$
  (geordnetes Paar von Knoten)





Gerichtete und ungerichtete Graphen

Anwendungen:

- Ungerichtete Graphen:
  symmetrische Beziehungen (z.B. $\{v, w\} \in E$ genau dann, wenn Person v und Person w verwandt sind)
- Gerichtete Graphen:
  asymmetrische Beziehungen (z.B. $(v, w) \in E$ genau dann, wenn Person v Person w mag)
  kreisfreie Beziehungen (z.B. $(v, w) \in E$ genau dann, wenn Person v Vorgesetzter von Person w ist

hier:

- Modellierung von ungerichteten durch gerichtete Graphen
- Ersetzung ungerichteter Kanten durch je zwei antiparallele gerichtete Kanten

Nachbarn: Adjazenz, Inzidenz, Grad

- Sind zwei Knoten v und w durch eine Kante e verbunden, dann nennt man
  - v und w adjazent bzw. benachbart
  - v und e inzident (ebenso w und e)
- Anzahl der Nachbarn eines Knotens v: Grad $\deg(v)$
  bei gerichteten Graphen:
  - Eingangsgrad: $\deg^-(v) = |\{(w, v) \in E\}|$
  - Ausgangsgrad: $\deg^+(v) = |\{(v, w) \in E\}|$

Annahmen

- Graph (also Anzahl der Knoten und Kanten) ist endlich
- Graph ist einfach, d.h. E ist eine Menge und keine Multimenge (anderenfalls heißt G Multigraph)
- Graph enthält keine Schleifen (Kanten von v nach v)

Gewichtete Graphen

In Abhängigkeit vom betrachteten Problem wird Kanten und / oder Knoten oft eine Eigenschaft (z.B. eine Farbe oder ein numerischer Wert, das Gewicht) zugeordnet (evt. auch mehrere), z.B.

- Distanzen (in Längen- oder Zeiteinheiten)
- Kosten
- Kapazitäten / Bandbreite
- Ähnlichkeiten
- Verkehrsdichte

Wir nennen den Graphen dann

- knotengewichtet bzw.
- kantengewichtet

Beispiel: $w: E \mapsto \mathbb{R}$
Schreibweise: $w(e)$ für das Gewicht einer Kante $e \in E$

Wege, Pfade und Kreise

- Weg (engl. *walk*) in einem Graphen $G = (V, E)$: alternierende Folge von Knoten und Kanten $x_0, e_1, \ldots, e_k, x_k$, so dass
  - $\forall i \in [0, k] : x_i \in V$ und
  - $\forall i \in [1, k] : e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$ bzw. $e_i = (x_{i-1}, x_i) \in E$.
- *Länge* eines Weges: Anzahl der enthaltenen Kanten
- Ein Weg ist ein Pfad, falls er (in sich) kantendisjunkt ist, falls also gilt: $e_i \neq e_j$ für $i \neq j$.
- Ein Pfad ist ein einfacher Pfad, falls er (in sich) knotendisjunkt ist, falls also gilt: $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.
- Ein Weg heißt *Kreis* (engl. *cycle*), falls $x_0 = x_k$.

Operationen

Graph G: Datenstruktur (Typ / Klasse, Variable / Objekt) für Graphen

Node: Datenstruktur für Knoten, Edge: Datenstruktur für Kanten

Operationen:

- G.insert(Edge e): $E := E \cup \{e\}$
- G.remove(Key i, Key j): $E := E \setminus \{e\}$ für Kante $e = (v, w)$ mit key$(v) = i$ und key$(w) = j$
- G.insert(Node v): $V := V \cup \{v\}$
- G.remove(Key i): sei $v \in V$ der Knoten mit key$(v) = i$ $V := V \setminus \{v\}$, $E := E \setminus \{(x, y) : x = v \vee y = v\}$
- G.find(Key i): gib Knoten v mit key$(v) = i$ zurück
- G.find(Key i, Key j): gib Kante (v, w) mit key$(v) = i$ und key$(w) = j$ zurück

Operationen

Anzahl der Knoten konstant

$\Rightarrow V = \{0, \ldots, n-1\}$

- (Knotenschlüssel durchnummeriert)

Anzahl der Knoten variabel

- Hashing kann verwendet werden für ein Mapping der n Knoten in den Bereich $\{0, \ldots, O(n)\}$

$\Rightarrow$ nur konstanter Faktor der Vergrößerung gegenüber statischer Datenstruktur

Graphrepräsentation

Darstellung von Graphen im Computer?

Vor- und Nachteile bei z.B. folgenden Fragen:

- Sind zwei gegebene Knoten v und w adjazent?
- Was sind die Nachbarn eines Knotens?
- Welche Knoten sind (direkte oder indirekte) Vorgänger bzw. Nachfolger eines Knotens v in einem gerichteten Graphen?
- Wie aufwendig ist das Einfügen oder Löschen eines Knotens bzw. einer Kante?