

Title: Mayr: 2012 ds (24.01.2013)  
Date: Thu Jan 24 10:15:20 CET 2013  
Duration: 90:39 min  
Pages: 46

## Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2012WS/ds/>

Wintersemester 2012



### 2.9 Erreichbarkeit

#### Definition 269

Sei  $G = (V, E)$ ;  $u, v \in V$ .  $v$  heißt von  $u$  aus in  $G$  erreichbar, falls  $G$  einen Pfad mit Endknoten  $u$  und  $v$  enthält.

#### Satz 270

Die Relation  $R \subseteq V \times V$  mit

$$uRv \iff \text{„}v \text{ ist von } u \text{ aus in } G \text{ erreichbar“}$$

ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

Es ist leicht zu sehen, dass  $R$  reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. □

### Inhaltsverzeichnis

▶ 6. November	▶ 8. Januar
▶ 8. November	▶ 10. Januar
▶ 13. November	▶ 15. Januar
▶ 16. Oktober	▶ 4. Dezember
▶ 18. Oktober	▶ 11. Dezember
▶ 23. Oktober	▶ 13. Dezember
▶ 25. Oktober	▶ 18. Dezember
▶ 30. Oktober	▶ 20. Dezember
▶ 15. November	
▶ 20. November	
▶ 22. November	
▶ 27. November	
▶ 29. November	



## 2.10 Zusammenhangskomponenten

Die Äquivalenzklassen der Erreichbarkeitsrelation heißen **Zusammenhangskomponenten** von  $G$ .  $G$  heißt **zusammenhängend**, falls  $G$  aus genau einer Zusammenhangskomponente besteht.

## 2.11 Bäume

### Definition 271

Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt **Baum**, falls  $G$  zusammenhängend und kreisfrei ist.

### Satz 272

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- 1  $G = (V, E)$  ist ein nichtleerer Baum.
- 2  $V \neq \emptyset$  und für je zwei Knoten  $u, v \in V$  mit  $u \neq v$  gibt es genau einen einfachen Pfad von  $u$  nach  $v$ .
- 3  $G$  ist zusammenhängend und  $|V| = |E| + 1$ .

### Satz 272

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- 1  $G = (V, E)$  ist ein nichtleerer Baum.
- 2  $V \neq \emptyset$  und für je zwei Knoten  $u, v \in V$  mit  $u \neq v$  gibt es genau einen einfachen Pfad von  $u$  nach  $v$ .
- 3  $G$  ist zusammenhängend und  $|V| = |E| + 1$ .

Beweis:

1.  $\Rightarrow$  2.

Seien  $u, v \in V$ ,  $u \neq v$ . Da  $G$  zusammenhängend ist, muss mindestens ein Pfad von  $u$  nach  $v$  existieren.

Widerspruchsannahme: Es gibt zwei verschiedene Pfade von  $u$  nach  $v$ .



Dann gibt es einen Kreis in  $G$ , was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.

-

Beweis (Forts.):

2.  $\Rightarrow$  3. Beweis durch Induktion:

Dass  $G$  zusammenhängend und  $V$  nichtleer sein muss, ist klar. Für  $|E| = 0$  gilt  $|V| = 1$  (Induktionsanfang).

$G$  muss einen Knoten mit Grad 1 enthalten: Wähle  $u \in V$  beliebig. Wähle einen Nachbarn  $u_1$  von  $u$ . Falls  $\deg(u_1) > 1$ , wähle einen Nachbarn  $u_2 \neq u$  von  $u_1$  usw. Da  $V$  endlich und  $G$  zusammenhängend und kreisfrei ist (sonst gäbe es ein Knotenpaar mit zwei verschiedenen einfachen Pfaden dazwischen), kommt man so schließlich zu einem Blatt (Knoten mit Grad 1).

Entfernt man dieses Blatt (sowie die inzidente Kante) und wendet auf den entstehenden Graphen die IV an, erhält man:

$$(|V| - 1) - 1 = |E| - 1$$

Damit ist bewiesen, dass  $|V| = |E| + 1$ .

Beweis (Forts.):

2.  $\Rightarrow$  3. Beweis durch Induktion:

Dass  $G$  zusammenhängend und  $V$  nichtleer sein muss, ist klar. Für  $|E| = 0$  gilt  $|V| = 1$  (Induktionsanfang).

$G$  muss einen Knoten mit Grad 1 enthalten: Wähle  $u \in V$  beliebig. Wähle einen Nachbarn  $u_1$  von  $u$ . Falls  $\deg(u_1) > 1$ , wähle einen Nachbarn  $u_2 \neq u$  von  $u_1$  usw. Da  $V$  endlich und  $G$  zusammenhängend und kreisfrei ist (sonst gäbe es ein Knotenpaar mit zwei verschiedenen einfachen Pfaden dazwischen), kommt man so schließlich zu einem Blatt (Knoten mit Grad 1).

Entfernt man dieses Blatt (sowie die inzidente Kante) und wendet auf den entstehenden Graphen die IV an, erhält man:

$$(|V| - 1) - 1 = |E| - 1$$

Damit ist bewiesen, dass  $|V| = |E| + 1$ .

Beweis (Forts.):

3.  $\Rightarrow$  1.

Sei nun  $G$  zusammenhängend mit  $|V| = |E| + 1$ .

Zu zeigen:  $G$  ist kreisfrei.

Widerspruchsannahme:  $G$  enthält einen einfachen Kreis  $C = (V_C, E_C)$ .

Da wir  $G$  aufbauen können, indem wir die Knoten in  $V \setminus V_C$  mit jeweils einer neuen Kante hinzufügen und zum Schluss noch eventuell übrig gebliebene Kanten hinzufügen, gilt:

$$|V| = |V_C| + |V \setminus V_C| \leq |E_C| + |E \setminus E_C| = |E|$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung  $|V| = |E| + 1$ .

□

Beweis (Forts.):

3.  $\Rightarrow$  1.

Sei nun  $G$  zusammenhängend mit  $|V| = |E| + 1$ .

Zu zeigen:  $G$  ist kreisfrei.

Widerspruchsannahme:  $G$  enthält einen einfachen Kreis  $C = (V_C, E_C)$ .

Da wir  $G$  aufbauen können, indem wir die Knoten in  $V \setminus V_C$  mit jeweils **einer** neuen Kante hinzufügen und zum Schluss noch eventuell übrig gebliebene Kanten hinzufügen, gilt:

$$|V| = |V_C| + |V \setminus V_C| \leq |E_C| + |E \setminus E_C| = |E|$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung  $|V| = |E| + 1$ .

□

### Korollar 273

Seien  $T = (V, E)$  ein Baum mit  $|V| = n$  und  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  die Gradfolge von  $T$ , dann gilt:

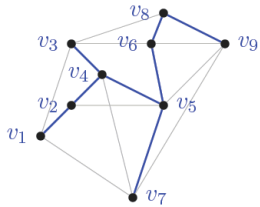
$$\sum_{i=1}^n d_i = 2 \cdot |E| = 2n - 2$$

## 2.12 Spannbäume

### Definition 274

Ein Teilgraph  $T = (V', E')$  von  $G = (V, E)$  heißt **Spannbaum** von  $G$ , falls  $T$  ein Baum und  $V' = V$  ist.

### Beispiel 275



$$E' = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_7), (v_5, v_6), (v_6, v_8), (v_8, v_9)\}$$

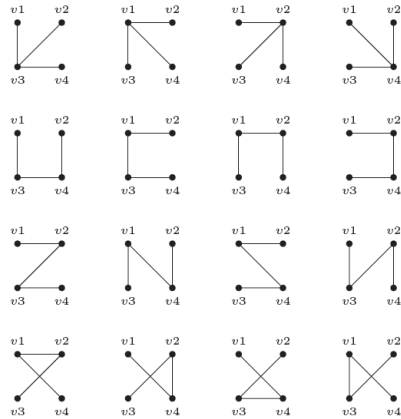
### Satz 276 (Arthur Cayley, 1889)

Sei  $t(n)$  die Anzahl der verschiedenen markierten Bäume mit Knotenmenge  $\{1, \dots, n\}$ . Dann gilt:

$$t(n) = n^{n-2}$$

Beispiel 277

- $n = 4$ :



Beweis (Forts.):

Sei  $T \in \mathcal{T}(n)$ . Konstruiere  $(a_1, \dots, a_{n-2})$ ,  $a_i \in \{1, \dots, n\}$ , wie folgt:

```

for  $i = 1$  to  $n - 2$  do
   $v_i :=$  Blatt mit minimalem Index
   $a_i :=$  Index des Nachbarn von  $v_i$  in  $T$ 
   $T := T \setminus \{v_i\}$ 
od
  
```

Beispiel 278



Beweis:

Wir geben eine Bijektion zwischen der Menge  $\mathcal{T}(n)$  der markierten Spannbäume mit  $n$  Knoten und der Menge  $\{1, \dots, n\}^{n-2}$  an.

(Diese Bijektion geht auf H. Prüfer zurück; man bezeichnet sie deshalb auch als Prüfer-Code.)

Beweis (Forts.):

Sei  $(a_1, \dots, a_{n-2}) \in \{1, \dots, n\}^{n-2}$ ;  $f_i$  sei die Anzahl des Auftretens von  $i$  in  $(a_1, \dots, a_{n-2})$ . Wenn ein Blatt, das Nachbar von  $a_i$  ist, im Algorithmus gestrichen wird, ist  $a_i$  nicht das kleinste Blatt, sondern innerer Knoten:

$$d(a_i) \geq f_i + 1$$

Da

$$n - 2 = \sum_{i=1}^n f_i \leq \sum_{i=1}^n (d(v_i) - 1) = 2n - 2 - n = n - 2$$

gilt

$$(\forall i) [f_i = d(a_i) - 1]$$

Also ergeben sich aus den  $f_i$  die Knotengrade. Insbesondere sind die Knoten mit  $f_i = 0$  (also die, die nicht im Code auftauchen), genau die Blätter des Baumes.

#### Definition 279

Eine Kante  $e$  eines Graphen  $G = (V, E)$  heißt **Brücke**, falls  $G' = (V, E \setminus \{e\})$  mehr Zusammenhangskomponenten hat als  $G$ .

Beispiel 280



#### Beobachtung:

Eine Kante  $e$  ist genau dann eine Brücke, wenn es keinen (einfachen) Kreis gibt, der  $e$  enthält.

Beweis (Forts.):

**Umkehrabbildung:** Gegeben  $(a_1, \dots, a_{n-2}) \in \{1, \dots, n\}^{n-2}$

**for**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**

$d(v_i) := f_i + 1$

**od**

$B := \emptyset; T := \emptyset$

**for**  $i = 1$  **to**  $n - 2$  **do**

$b := \min_{1 \leq j \leq n} \{j; j \notin \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-2}\} \cup B\}$

füge Kante  $(b, a_i)$  zu  $T$  hinzu

$B := B \cup \{b\}$

**od**

füge letzte Kante zu  $T$  gemäß Gradbedingung hinzu

□

### 2.14 Abstand

#### Definition 281

Seien  $u, v$  zwei Knoten und  $P$  ein Pfad in  $G$  von  $u$  nach  $v$  mit einer minimalen Anzahl  $k$  von Kanten. Dann heißt

$$d(u, v) := k$$

der **Abstand** von  $u$  und  $v$  in  $G$ .

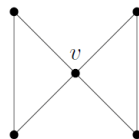
Wir setzen  $d(u, v) := \infty$ , falls  $u$  und  $v$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von  $G$  liegen.

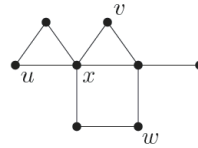
$$D(G) := \max\{d(u, v); u, v \in V\}$$

heißt der Durchmesser des Graphen  $G$ .

**Anmerkung:** (ohne Definition)

Der Knoten  $v$  in der folgenden Abbildung ist ein **Artikulationsknoten**:





$$d(u, v) = 2, d(u, w) = 3, d(u, x) = 1, D(G) = 3.$$

Beobachtung:

$d$  erfüllt die Dreiecksungleichung, ist also eine Metrik:

$$d(u, w) \leq d(u, x) + d(x, w)$$

Satz 284

Sei  $A$  die Adjazenzmatrix von  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ , und sei

$$A^0 := I, \\ A^{i+1} := A^i \cdot A \quad \text{für alle } i \geq 0.$$

Dann gilt für

$$A^k = (a_{ij}^{(k)})_{1 \leq i, j \leq n} :$$

$a_{i,j}^{(k)}$  ist die Anzahl verschiedener Pfade der Länge  $k$  in  $G$  von  $v_i$  nach  $v_j$ .

Achtung: Die Länge eines Pfades wird hier durch die Länge seiner Kanten- und nicht der Knotenfolge angegeben!

2.15 Adjazenzmatrix

Definition 283

Sei  $G = (V, E)$ ,  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Dann heißt

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von  $G$ .

Beobachtungen:

Beweis:

Induktion nach  $k$ :

Induktionsanfang:  $k = 0$  und  $k = 1$  sind trivial.

Induktionsschluss:  $k \mapsto k + 1$

$a_{ij}^{(k)}$  ist nach Induktionsvoraussetzung die Anzahl verschiedener Pfade der Länge  $k$  von  $v_i$  nach  $v_j$ .

Die Anzahl verschiedener Pfade von  $v_i$  nach  $v_j$  der Länge  $k + 1$  lässt sich wie folgt berechnen:

$$\sum_{l=1}^n a_{il}^{(k)} \cdot a_{lj} = a_{ij}^{(k+1)}$$

□

Beweis:

Induktion nach  $k$ :

Induktionsanfang:  $k = 0$  und  $k = 1$  sind trivial.

Induktionsschluss:  $k \mapsto k + 1$

$a_{ij}^{(k)}$  ist nach Induktionsvoraussetzung die Anzahl verschiedener Pfade der Länge  $k$  von  $v_i$  nach  $v_j$ .

Die Anzahl verschiedener Pfade von  $v_i$  nach  $v_j$  der Länge  $k + 1$  lässt sich wie folgt berechnen:

$$\sum_{l=1}^n a_{il}^{(k)} \cdot a_{lj} = a_{ij}^{(k+1)}$$

□

**Bemerkung:**

Adjazenzmatrix von bipartiten Graphen

Sei  $G = (U, V, E)$  mit  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  und  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$  ein bipartiter Graph.

Dann heißt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von  $G$ .

Beweis:

Induktion nach  $k$ :

Induktionsanfang:  $k = 0$  und  $k = 1$  sind trivial.

Induktionsschluss:  $k \mapsto k + 1$

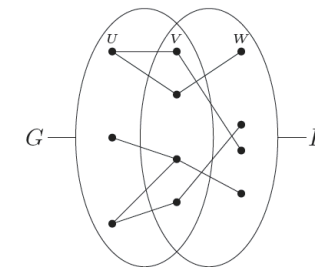
$a_{il}^{(k)}$  ist nach Induktionsvoraussetzung die Anzahl verschiedener Pfade der Länge  $k$  von  $v_i$  nach  $v_l$ .

Die Anzahl verschiedener Pfade von  $v_i$  nach  $v_j$  der Länge  $k + 1$  lässt sich wie folgt berechnen:

$$\sum_{l=1}^n a_{il}^{(k)} \cdot a_{lj} = a_{ij}^{(k+1)}$$

□

Werden zwei bipartite Graphen zusammengesetzt, zum Beispiel:



berechnet sich die Adjazenzmatrix  $A'$  des bipartiten Graphen  $G' = (U, W, E')$ , mit

$$\{u, w\} \in E' \iff (\exists v \in V)[\{u, v\} \in G \text{ und } \{v, w\} \in H]$$

als das boolesche Produkt  $A_G \cdot A_H$ :



Wir betrachten einfache ungerichtete Graphen.

**Definition 285**

Seien  $A \in \mathbb{B}^{m,k}$ ,  $B \in \mathbb{B}^{k,n}$  zwei boolesche Matrizen, interpretiert als 0,1-Matrizen. Dann ist das boolesche Produkt  $C = AB$  der beiden Matrizen gegeben durch

$$c_{i,j} = \bigvee_{l=1}^k a_{i,l} \wedge b_{l,j} \quad \text{für } i \in [m], j \in [n]$$

Wir betrachten einfache ungerichtete Graphen.

**Definition 285**

Seien  $A \in \mathbb{B}^{m,k}$ ,  $B \in \mathbb{B}^{k,n}$  zwei boolesche Matrizen, interpretiert als 0,1-Matrizen. Dann ist das boolesche Produkt  $C = AB$  der beiden Matrizen gegeben durch

$$c_{i,j} = \bigvee_{l=1}^k a_{i,l} \wedge b_{l,j} \quad \text{für } i \in [m], j \in [n]$$

**2.16 Inzidenzmatrix**

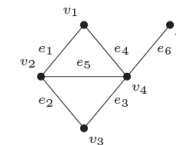
**Definition 286**

Sei  $G = (V, E)$  mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  und  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ . Dann heißt

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \quad \text{mit } b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die **Inzidenzmatrix** von  $G$ .

**Beispiel 287 (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)**



Adjazenzmatrix:

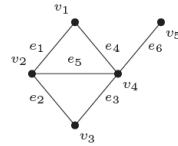
$$A = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



Beobachtung:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} d(v_1) & & & & & \\ & d(v_2) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & d(v_n) & \\ & & & & & \end{pmatrix} + A$$

Beispiel (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)

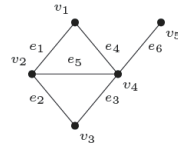


Inzidenzmatrix:

$$B = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



Beispiel (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)



Inzidenzmatrix:

$$B = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



### 3. Definitionen für gerichtete Graphen

#### 3.1 Digraph

##### Definition 288

Ein **Digraph** (aka gerichteter Graph, engl. *directed graph*)  $G = (V, A)$  besteht aus einer Knotenmenge  $V$  und einer Menge  $A \subseteq V \times V$  von geordneten Paaren, den **gerichteten** Kanten.

### 3.2 Grad

#### Definition 289

- $d^-(v)$  ist der **Aus-Grad** von  $v$ , d. h. die Anzahl der Kanten mit Anfangsknoten  $v$ .
- $d^+(v)$  ist der **In-Grad** von  $v$ , d. h. die Anzahl der Kanten mit Endknoten  $v$ .
- $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$  ist der (**Gesamt-**)Grad von  $v$ .

#### Beobachtung:

$$\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v) = |A|$$

### 3.3 Adjazenzmatrix

#### Definition 290

Sei  $G = (V, A)$  ein Digraph mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Dann heißt

$$C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{mit} \quad c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (v_i, v_j) \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die **Adjazenzmatrix** von  $G$ .

Falls  $G$  schlingenfrei ist, sind alle Diagonalelemente von  $C$  gleich 0.

### 3.4 Inzidenzmatrix

#### Definition 291

Sei  $G = (V, A)$  ein einfacher(!) Digraph mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  und  $A = \{e_1, \dots, e_m\}$ . Dann heißt

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \quad \text{mit} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \text{ Endknoten von } e_j \\ -1 & \text{falls } v_i \text{ Anfangsknoten von } e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die **Inzidenzmatrix** von  $G$ .

**Beobachtung:**

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} d(v_1) & & & \\ & d(v_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d(v_n) \end{pmatrix} - A'$$

Diese Matrix heißt **Laplacesche Matrix**. Dabei ist, für alle  $i, j$ , der Eintrag  $a'_{i,j}$  die Anzahl der im zu  $G$  gehörigen **ungerichteten** Graphen zwischen  $v_i$  und  $v_j$  verlaufenden Kanten. Enthält  $G$  keine antiparallelen Kanten, ist damit  $A'$  gleich der Adjazenzmatrix dieses ungerichteten Graphen.

**Beobachtung:** Die Laplacesche Matrix ist symmetrisch.

**Beobachtung:**

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} d(v_1) & & & \\ & d(v_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d(v_n) \end{pmatrix} - A'$$

Diese Matrix heißt **Laplacesche Matrix**. Dabei ist, für alle  $i, j$ , der Eintrag  $a'_{i,j}$  die Anzahl der im zu  $G$  gehörigen **ungerichteten** Graphen zwischen  $v_i$  und  $v_j$  verlaufenden Kanten. Enthält  $G$  keine antiparallelen Kanten, ist damit  $A'$  gleich der Adjazenzmatrix dieses ungerichteten Graphen.

**Beobachtung:** Die Laplacesche Matrix ist symmetrisch.