Script generated by TTT

Title: Meixner: test2 (06.11.2012)

Date: Tue Nov 06 13:52:50 CET 2012

Duration: 81:15 min

Pages: 29

WS 2012/13

Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2012WS/ds/

Wintersemester 2012

Alternativer, direkter Beweis

Beweis:
Man beachte, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $f^{m+1}(S) \subseteq f^m(S)$!

Die Menge $\{|f^m(S)|;\ m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}_0$ ist nicht leer und besitzt deshalb aufgrund der Wohlordnungseigenschaft ein minimales Element $|f^r(S)|$.

Damit gilt $|f^r(S)| \leq |f^{r+1}(S)|$.

Wegen $f^{r+1}(S) \subseteq f^r(S)$ folgt

$$|f^r(S)| = |f^{r+1}(S)|\,,$$

also auch $f^r(S) = f^{r+1}(S)$.

□

Beispiel 36

Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ und n ungerade. Dann lässt sich n als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen.

Beweis:
Falls $n = x^2 - y^2$ mit $x, y \in \mathbb{N}$, $x > y$, dann gilt $n = (x-y)(x+y)$.
Sei nun $s := x + y$ und $t := x - y$. Dann ist

$$s > t > 0$$
$$n = s \cdot t$$
$$x = (s+t)/2$$
$$y = (s-t)/2$$

Also müssen s und t beide gerade oder beide ungerade sein.

Beweis (Forts.):

Da

$$
\begin{aligned}
s &> t > 0\\
n &= s \cdot t\\
x &= (s+t)/2\\
y &= (s-t)/2
\end{aligned}
$$

kann man für ungerades n stets $s := n$ und $t := 1$ setzen und erhält damit $x = (n+1)/2$ und $y = (n-1)/2$, die die Behauptung erfüllen! $\square$

Beweis (Forts.):

Da

$$
\begin{aligned}
s &> t > 0\\
n &= s \cdot t\\
x &= (s+t)/2\\
y &= (s-t)/2
\end{aligned}
$$

kann man für ungerades n stets $s := n$ und $t := 1$ setzen und erhält damit $x = (n+1)/2$ und $y = (n-1)/2$, die die Behauptung erfüllen! $\square$

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.6 Beweistechniken 89/140

Bemerkungen:

1. Falls n eine ungerade Primzahl ist, sind s und t eindeutig bestimmt und es gibt genau eine Lösung für x und y.

Bemerkungen:

1. Falls n eine ungerade Primzahl ist, sind s und t eindeutig bestimmt und es gibt genau eine Lösung für x und y.
2. Für allgemeine n kann es mehr als eine Lösung geben, z.B. für $n = 15$

$$
\begin{aligned}
s = 5, t = 3 &\text{ und } 15 = 16 - 1\,, \text{ oder}\\
s = 15, t = 1 &\text{ und } 15 = 64 - 49\,.
\end{aligned}
$$

3. Auch für gerade n kann es Lösungen geben, z.B.

$$
\begin{aligned}
8 &= 9 - 1\\
48 &= 7^2 - 1^2\\
48 &= 8^2 - 4^2
\end{aligned}
$$

4.7 Einige Sprechweisen

1. Wir sagen
   „Eine Bedingung/Eigenschaft A ist hinreichend für eine Eigenschaft B“,
   falls
   $$A \Rightarrow B\,.$$
2. Wir sagen
   „Eine Bedingung/Eigenschaft A ist notwendig für eine Eigenschaft B“,
   falls
   $$A \Leftarrow B \text{ (bzw. } B \Rightarrow A\text{)}\,.$$
3. Wir sagen
   „Eine Bedingung/Eigenschaft A ist notwendig und hinreichend für eine Eigenschaft B“,
   falls
   $$A \Leftrightarrow B \text{ (bzw. } A \equiv B\text{)}\,.$$

4.8 Folgen und Grenzwerte

R bezeichne einen Bereich wie z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}_0$, oder $\mathbb{Z}$.

Definition 37

1. Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. Eine endliche Folge reeller (bzw. rationaler, natürlicher, ganzer) Zahlen
   $$(a_i)_{0\le i\le k}$$
   ist eine Abbildung
   $$\{0, 1, \ldots, k\} \ni i \mapsto a_i \in R\,.$$
2. Eine unendliche Folge
   $$(a_n)_{n\ge 0}$$
   ist eine Abbildung
   $$\mathbb{N}_0 \ni n \mapsto a_n \in R\,.$$

4.8 Folgen und Grenzwerte

R bezeichne einen Bereich wie z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}_0$, oder $\mathbb{Z}$.

Definition 37

1. Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. Eine endliche Folge reeller (bzw. rationaler, natürlicher, ganzer) Zahlen
   $$(a_i)_{0\le i\le k}$$
   ist eine Abbildung
   $$\{0, 1, \ldots, k\} \ni i \mapsto a_i \in R\,.$$
2. Eine unendliche Folge
   $$(a_n)_{n\ge 0}$$
   ist eine Abbildung
   $$\mathbb{N}_0 \ni n \mapsto a_n \in R\,.$$

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr 92/140

Sei $(a_n)_{n\ge 0}$ eine reelle Folge.

1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen
   „Die Folge $(a_n)_{n\ge 0}$ konvergiert für $n \to \infty$ nach a“,
   und schreiben
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$
   falls gilt:
   $$(\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_\epsilon)[|a_n - a| < \epsilon]\,.$$
2. Wir sagen
   „Die Folge $(a_n)_{n\ge 0}$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen $+\infty$“,
   und schreiben
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\,,$$
   falls gilt:
   $$(\forall M \in \mathbb{N}\ \exists n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_M)[a_n > M]\,.$$

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine reelle Folge.

1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen
„Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert für $n \to \infty$ nach a“,
und schreiben
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$
falls gilt:
$$(\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon)[|a_n - a| < \epsilon]\,.$$

2. Wir sagen
„Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen $+\infty$“,
und schreiben
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\,,$$
falls gilt:
$$(\forall M \in \mathbb{N}\ \exists n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_M)[a_n > M]\,.$$

Beispiel 38

Sei für $n \in \mathbb{N}$ $a_n := \frac{1}{n}\sin n$.
Behauptung:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (für $n \to \infty$) gegen 0.

Beweis:
Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, $N > \epsilon^{-1}$. Dann gilt für $n \geq N$:
$$|a_n - 0| = \frac{1}{n}|\sin n| \leq \frac{1}{n}\cdot 1 \leq \frac{1}{N} < \epsilon\,.$$

Bemerkungen:

1. Falls es für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$
so sagen wir, „die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ divergiert für $n \to \infty$“.
2. Konvergenz gegen $-\infty$ wird entsprechend definiert.
3. Für Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ wird das Konvergenzverhalten (bzw. $\lim_{n\to\infty} f(n)$) analog definiert (indem man die Folge $(f(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ betrachtet).

4.9 Das Wachstumsverhalten von Funktionen

Die Groß-O-Notation wurde von D. E. Knuth in der Algorithmenanalyse eingeführt. Sie wurde ursprünglich von Paul Bachmann (1837–1920) entwickelt und von Edmund Landau (1877–1938) in seinen Arbeiten verbreitet.

Definition 39 (Groß-O-Notation)

- $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\exists c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
$$(\forall n \geq n_0)\quad [|f(n)| \leq c\cdot g(n)]$$
„f wächst bis auf einen konstanten Faktor nicht schneller als g“
- $f(n) \in o(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\forall c > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
$$(\forall n \geq n_0)\quad [|f(n)| \leq c\cdot g(n)]$$
„f wächst echt langsamer als g“

4.9 Das Wachstumsverhalten von Funktionen

Die Groß-O-Notation wurde von D. E. Knuth in der Algorithmenanalyse eingeführt. Sie wurde ursprünglich von Paul Bachmann (1837–1920) entwickelt und von Edmund Landau (1877–1938) in seinen Arbeiten verbreitet.

Definition 39 (Groß-O-Notation)

- $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\exists c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0) \quad [|f(n)| \leq c \cdot g(n)]$$

„f wächst bis auf einen konstanten Faktor nicht schneller als g“

- $f(n) \in o(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\forall\, c > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0) \quad [|f(n)| < c \cdot g(n)]$$

„f wächst echt langsamer als g“

Mozilla Firefox

Datei Bearbeiten Ansicht Chronik Lesezeichen Extras Hilfe

file:///C:/Dokumente und Einstellungen/Meixner/Eigene Dateien/TUM_svn/Uebungen/DS1_12ws/svnds_12ws/Vorlesung/history/Knuth.

Knuth

Donald Ervin Knuth

Born: 10 Jan 1938 in Milwaukee, Wisconsin, USA

Click the picture above
to see four larger pictures

Previous	(Chronologically)	Next	Biographies Index
Previous	(Alphabetically)	Next	Main index

Donald Knuth's parents were Ervin Henry Knuth and Louise Marie Bohning. Donald's father Ervin was a school teacher who taught in a Lutheran school. He played a very important role in determining Donald's interests, and it was through his father that that Donald gained his love for education, music, and mathematics. Ervin played the church organ at the Sunday church services and Donald soon became a passionate lover of the organ.

Donald attended Lutheran schools and from the special emphasis that was placed on English grammar in these schools came Knuth's love of investigating sentence structure. His fascination with this in his first couple of years of secondary school would lead naturally towards writing computer code when he eventually encountered computers, but this did not happen until after his school education was complete. During these first years at secondary school there were other signs of where Knuth's interests would eventually lead. One episode, repeated in most biographies of Knuth but still worth repeating in this one, concerns "Ziegler's Giant Bar."

He entered a competition set up by the confectionary manufacturer Ziegler. The aim was to see how many words could be made with the letters of "Ziegler's Giant Bar" and for the schoolboy Knuth this was exactly the sort of challenge that he loved. He spent two weeks during which he pretended to be ill and, using a dictionary, he came up with 4500 words. The judges for the competition had only found 2500 and Knuth was an easy winner. He commented afterwards that had he thought to use the apostrophe he could have found many more! His school benefited by receiving a television set as a prize.

At high school Knuth's interests were more directed towards music than they were to mathematics. His musical interests involved both playing and composing music and he decided at that stage that he would

Fertig

4.9 Das Wachstumsverhalten von Funktionen

Die Groß-O-Notation wurde von D. E. Knuth in der Algorithmenanalyse eingeführt. Sie wurde ursprünglich von Paul Bachmann (1837–1920) entwickelt und von Edmund Landau (1877–1938) in seinen Arbeiten verbreitet.

Definition 39 (Groß-O-Notation)

- $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\exists c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0) \quad [|f(n)| \leq c \cdot g(n)]$$

„f wächst bis auf einen konstanten Faktor nicht schneller als g“

- $f(n) \in o(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\forall\, c > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0) \quad [|f(n)| < c \cdot g(n)]$$

„f wächst echt langsamer als g“

4.9 Das Wachstumsverhalten von Funktionen

Die Groß-O-Notation wurde von D. E. Knuth in der Algorithmenanalyse eingeführt. Sie wurde ursprünglich von Paul Bachmann (1837–1920) entwickelt und von Edmund Landau (1877–1938) in seinen Arbeiten verbreitet.

Definition 39 (Groß-O-Notation)

- $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\exists c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0) \quad [|f(n)| \leq c \cdot g(n)]$$

„f wächst bis auf einen konstanten Faktor nicht schneller als g“

- $f(n) \in o(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\forall\, c > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0) \quad [|f(n)| < c \cdot g(n)]$$

„f wächst echt langsamer als g“

- $f(n) \in \Omega(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\exists c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0)\ [|f(n)| \geq c \cdot g(n) \geq 0]$$

„f wächst bis auf einen konstanten Faktor nicht langsamer als g“

- $f(n) \in \omega(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\forall\ c > 0$ $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0)\ [|f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0]$$

„f wächst echt schneller als g“

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn

$$f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \text{ und } f(n) \in \Omega(g(n))$$

„f wächst (bis auf konstante Faktoren) genauso schnell wie g“

- $f(n) \in \Omega(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\exists c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0)\ [|f(n)| \geq c \cdot g(n) \geq 0]$$

„f wächst bis auf einen konstanten Faktor nicht langsamer als g“

- $f(n) \in \omega(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn $\forall\ c > 0$ $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0)\ [|f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0]$$

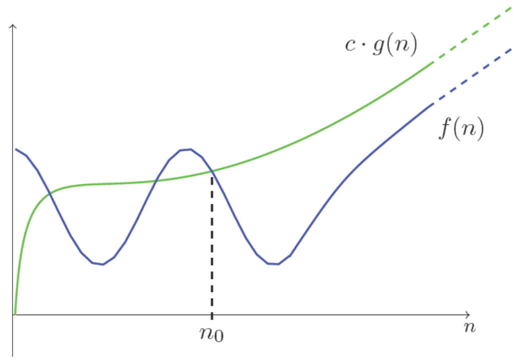
„f wächst echt schneller als g“

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ (für $n \to \infty$) genau dann, wenn

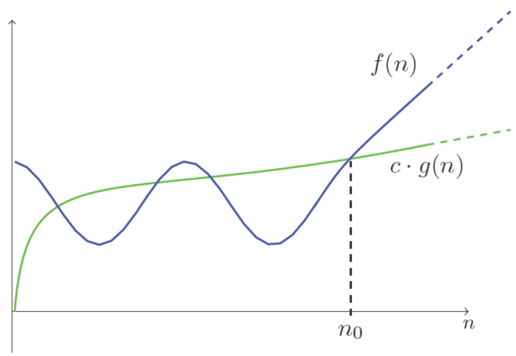
$$f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \text{ und } f(n) \in \Omega(g(n))$$

„f wächst (bis auf konstante Faktoren) genauso schnell wie g“

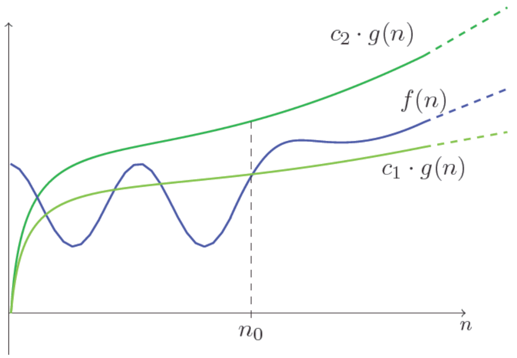
Graphische Darstellung von $\mathcal{O}$



Graphische Darstellung von ω



Graphische Darstellung von Θ



- $f(n) \in \Omega_\infty(g(n))$ genau dann, wenn $\exists\ c > 0$, so dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| \geq c \cdot g(n) \geq 0\,.$$

- $f(n) \in \omega_\infty(g(n))$ genau dann, wenn $\forall\ c > 0\ \exists$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0\,.$$

Bemerkungen:

- $f(n) \in \Omega_\infty(g(n))$ genau dann, wenn $\exists\ c > 0$, so dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| \geq c \cdot g(n) \geq 0\,.$$

- $f(n) \in \omega_\infty(g(n))$ genau dann, wenn $\forall\ c > 0\ \exists$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0\,.$$

Bemerkungen:

1. Man schreibt oft, aber logisch unsauber $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$.
2. Oft werden nur Funktionen $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ betrachtet (oder $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$); dann sind die Absolutbeträge überflüssig.
3. Manchmal werden auch Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder das Verhalten für $x \to a$ betrachtet.
4. Achtung: Die Notation für Ω und Ω_∞ ist in der Literatur nicht eindeutig; im Zweifelsfall muss auf die jeweilige Definition geachtet werden!

Rechenzeit in Abhängigkeit von der Problemgröße

Problemgröße	Zeitbedarf					
n	$\log n$	n	$n \log n$	n^2	2^n	$n!$
10	3×10^{-9} s	10^{-8} s	3×10^{-8} s	10^{-7} s	10^{-6} s	3×10^{-3} s
10^2	7×10^{-9} s	10^{-7} s	7×10^{-7} s	10^{-5} s	4×10^{13} yr	*
10^3	$1,0 \times 10^{-8}$ s	10^{-6} s	1×10^{-5} s	10^{-3} s	*	*
10^4	$1,3 \times 10^{-8}$ s	10^{-5} s	1×10^{-4} s	10^{-1} s	*	*
10^5	$1,7 \times 10^{-8}$ s	10^{-4} s	2×10^{-3} s	10 s	*	*
10^6	2×10^{-8} s	10^{-3} s	2×10^{-2} s	17 min	*	*

Annahme: eine Operation dauert 10^{-9} Sekunden, $\log n = \log_2 n$

Bezeichnung von Wachstums-Größenordnungen

$o(1)$	konvergiert gegen 0
$\mathcal{O}(1)$	beschränkt durch Konstante
$\mathcal{O}(\log n)$	logarithmische Funktion
$\mathcal{O}(\log^k n)$	polylogarithmische Funktion
$\mathcal{O}(n)$	linear beschränkte Funktion
$\bigcup_{k\geq 0}\mathcal{O}(n^k)$	polynomiell beschränkte Funktion
$\bigcup_{c>0}\Omega(2^{cn})$	(mindestens) exponentielle Funktion

Beispiel 40

Behauptung: $n! \in O(n^n)$

Beweis:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left[n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \leq 1\cdot n^n\right]$$

$\square$

Beispiel 41

Behauptung: $\log n! \in O(n \log n)$

Beweis:

$(\forall n \in \mathbb{N})[\log n! = \log n + \log(n-1) + \ldots + \log 1 \leq 1 \cdot n \cdot \log n]$ $\square$